Dans toute la suite du problème, si $f \in E$, on note $U(f)$ la fonction g obtenue à la question d).

2. *Linéarité de U*

a) Expliciter $U(f)$ dans le cas où $f = 1$.

b) Montrer que U est un endomorphisme de E.

c) U est-il injectif ?

d) On définit les puissances successives de U par $U^0 = Id_E$ et pour tout entier naturel n non nul, $U^n = U^{n-1} \circ U$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U^{n+1}(f)$ est la fonction : $x \mapsto \mathrm{e}^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} \mathrm{e}^{-at} f(t)dt$.

3. *Cas des fonctions exponentielles*

a) Pour k un nombre réel positif et f_k la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-kx}$, expliciter $U(f_k)$.

b) En déduire que, pour tout réel $\lambda \in \left]0, \frac{1}{a}\right]$, $\mathrm{Ker}(U - \lambda id_E) \neq \{0\}$.

c) Pour tout entier naturel n, expliciter $U^n(f_k)$. Pour x élément de I, préciser $\lim\limits_{n\to\infty}\left[U^n(f_k)\right](x)$.

4. *Cas des fonctions sinus et cosinus*

Dans cet exemple seulement (ensemble de la question I-4), on prendra $a = 1$.

a) Expliciter $U(\sin)$ et $U(\cos)$.

b) Montrer que le sous-espace P de E engendré par les fonctions *sin* et *cos* est stable par U et que (*sin*, *cos*) en est une base. Dans cette base, écrire la matrice M de l'endomorphisme $U_P : \begin{cases} P \to P \\ f \mapsto U(f) \end{cases}$.

c) Calculer M^2, M^3, M^4. Expliciter M^n pour tout entier naturel n, puis préciser la limite des coefficients de M^n lorsque n tend vers l'infini.

5. *Une autre famille de fonctions*

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction de E $\varphi_n : x \mapsto e^{-x}x^n$ et on note ψ_n la fonction $U(\varphi_n)$.

a) Pour n entier naturel non nul, établir une relation entre ψ_n, φ_n et ψ_{n-1}.

b) Pour p entier naturel, montrer que le sous espace F_p de E engendré par $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ est stable par U et admet pour base $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_p)$.

c) On prend ici $p = 2$, écrire dans la base $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ de F_2 la matrice T_2 de l'endomorphisme $U_2 : \begin{cases} F_2 \to F_2 \\ f \mapsto U(f) \end{cases}$. Calculer T_2^n pour tout entier naturel n, puis préciser la limite des coefficients de T_2^n lorsque n tend vers l'infini.

6. *Une autre expression de $U(f)$*

Pour $f \in E$, montrer que : $\forall x \in I$, $U(f)(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} f(x+t)dt$.

7. *Positivité de U*

a) Pour $f \in E$, montrer que : $|U(f)| \leq U(|f|)$.

On considère maintenant φ un élément de E à valeurs positives et $\psi = U(\varphi)$.

b) Montrer que ψ est à valeurs positives.

c) On suppose que φ est décroissante. Montrer que $a\psi \leq \varphi$ puis que ψ est décroissante.

8. *Commutation de U avec la dérivation*

On note $E_1 = \{f \in E \cap C^1(I,\mathbb{R}) / f' \text{ bornée sur } I\}$ et D l'opérateur de dérivation qui, à tout élément de E_1, associe sa dérivée.

a) Pour f un élément de E_1, montrer, en utilisant la question 6, que : $aU(f) = f + U(f')$.

b) En déduire que, pour tout élément f de E_1, $D(U(f)) = U(D(f))$.

c) Pour f une fonction de E_1 à valeurs positives et décroissante, retrouver le résultat de la question **7.c)** : $U(f)$ est décroissante.

II. Comportement asymptotique de $U(f)$ au voisinage de $+\infty$

On traite ici quelques cas fondamentaux, en partant d'exemples de fonctions f pour lesquelles on peut connaître le comportement de $g = U(f)$ au voisinage de $+\infty$.

1. *Résultats préliminaires*

On considère ici α et β deux fonctions à valeurs réelles, continues sur I. On suppose que, $\forall x \in I$, $\beta(x) > 0$, et que $\int_1^{+\infty} \beta(t)\,dt$ converge.

a) On suppose ici que $\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\beta(x))$ et on se propose de montrer que $\int_x^{+\infty} \alpha(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \beta(t)\,dt\right)$.

Soit $\varepsilon > 0$, montrer que : $\exists A > 0 / \forall x \geq A$, $\left|\int_x^{+\infty} \alpha(t)\,dt\right| \leq \varepsilon \int_x^{+\infty} \beta(t)\,dt$. Conclure.

b) On suppose maintenant que $\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \beta(x)$, montrer que $\int_x^{+\infty} \alpha(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \beta(t)\,dt$.

2. *Cas des fonctions admettant une limite en* $+\infty$

Si f est un élément de E admettant une limite finie b en $+\infty$ (b est un nombre réel), montrer que $g = U(f)$ admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera (*on pourra commencer par traiter le cas où b = 0 en écrivant, dans ce cas,* $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1)$ *et en utilisant la question* **1.**).

3. *Cas des fonctions puissances*

Dans cette question et la suivante, ω est un réel strictement positif, on note f_ω la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\omega}$ et $g_\omega = U(f_\omega)$.

a) Montrer que $g_\omega(x) = \frac{f_\omega(x)}{a} - \frac{\omega}{a} g_{\omega+1}(x)$. En déduire que $g_\omega(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{f_\omega(x)}{a}$.

b) Montrer que pour tout x de I : $\int_1^x \frac{e^{-at}}{t}\,dt = \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k.k!}(x^k - 1)$ (On pourra utiliser une inégalité de Taylor-Lagrange pour la fonction $t \mapsto e^{-at}$), et en déduire :

$$g_1(x)=e^{ax}\left\{-\ln x-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{a^k}{k.k!}\left(x^k-1\right)+\int_1^{+\infty}\frac{e^{-at}}{t}dt\right\}.$$

4. *Cas des fonctions comparables aux fonctions puissances f_ω*

On note toujours f un élément de E et $g=U(f)$.

a) Prouver que si f est négligeable devant f_ω au voisinage de $+\infty$, alors g est négligeable devant g_ω au voisinage de $+\infty$.

b) Prouver que si f est équivalent à f_ω au voisinage de $+\infty$, alors g est équivalent à $\dfrac{f}{a}$ au voisinage de $+\infty$.

III Convergence absolue de $\int_1^{+\infty} U(f)$

On s'intéresse dans cette partie à la convergence de $\int_1^{+\infty}\left|\left[U(f)\right](t)\right|dt$ dans le cas où $\int_1^{+\infty}|f(t)|dt$ est elle-même convergente. On note toujours $g=U(f)$.

1. *Etudes d'exemples*

a) Pour k un réel strictement positif et $f_k : t\mapsto \mathrm{e}^{-kt}$, on note $g_k=U(f_k)$. Vérifier que $\int_1^{+\infty} g_k(t)dt$ est convergente.

b) Pour ω un réel strictement positif, on note encore $f_\omega : t\mapsto\dfrac{1}{t^\omega}$ et $g_\omega=U(f_\omega)$. Pour quelles valeurs de ω, $\int_1^{+\infty} g_\omega(t)dt$ est-elle convergente ?

2. *Cas des fonctions positives*

Dans cette question, f est un élément de E, à valeurs positives tel que $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

On note $F : x\in I\mapsto\int_1^x f(t)dt$, $g=U(f)$ et $G : x\in I\mapsto\int_1^x g(t)dt$.

a) Vérifier que $G'-aG=-F+g(1)$.

b) Justifier que F est dans E et montrer qu'il existe une constante réelle K telle que, pour tout $x\in I$, $G(x)=K\,\mathrm{e}^{ax}+\left[U(F)\right](x)-\dfrac{g(1)}{a}$.

c) Vérifier que la fonction $x\mapsto\dfrac{G(x)}{x}$ est bornée sur I.

d) En déduire que $K=0$ et que $G=U(F)-\dfrac{g(1)}{a}$.

e) Montrer alors que $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ est convergente.

3. *Cas général*

Dans cette question, f est un élément de E tel que $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente.

Montrer que $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ est absolument convergente.