Partie I : représentation intégrale d'une fonction puissance

Préambule : on désigne par φ une application définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs positives telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{1+t^2}dt$ soit convergente et on lui associe la fonction f d'une variable réelle définie par : $\displaystyle f(x)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2}-\frac{1}{x+t}\right)\varphi(t)\,dt$.

Question préliminaire : Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1°) Pour quelles valeurs du réel α, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{1+t^2}dt$ est-elle convergente ?

Dans toute la suite du problème, pour de telles valeurs de α, on désignera par f_α l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f_\alpha(x)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2}-\frac{1}{x+t}\right)t^\alpha dt.$$

2°) exprimer f_0 à l'aide des fonctions usuelles.

3°) **On suppose que $\alpha\in\left]-1,0\right[$.**

Pour $x>0$, prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{x+t}dt$ et, à l'aide d'un changement de variable, l'exprimer en fonction de x^α et d'un réel ne dépendant que de α.

En déduire l'existence de c et d, réels ne dépendant que de α, tels que : $\forall x>0,\ f_\alpha(x)=c.x^\alpha+d$. Préciser le signe de c.

4°) **On suppose que $\alpha\in\left]0,1\right[$.**

a) Lorsque x et h sont des réels tels que $x>0$, $x+h>0$ et $h\neq 0$, vérifier la relation :

$$\frac{f_\alpha(x+h)-f_\alpha(x)}{h}=\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)}dt.$$

Montrer alors que f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que : $\displaystyle\forall x>0,\ f'_\alpha(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(x+t)^2}dt$

b) Justifier la relation : $\forall x>0,\ f'_\alpha(x)=f'_\alpha(1).x^{\alpha-1}$. En déduire l'existence de c et d, réels ne dépendant que de α, tels que : $\forall x>0,\ f_\alpha(x)=c.x^\alpha+d$. Préciser le signe de c.

Partie II : les matrices symétriques réelles

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques, c'est-à-dire $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ /\ {}^tM=M\}$.

On dit qu'une matrice M de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si pour toute matrice colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(X\neq 0\Rightarrow {}^tXMX>0)$.

L'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sera noté $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Enfin, lorsque A et B sont deux matrices symétriques vérifiant $B-A\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on dira que A est strictement plus petite que B et on le notera $A<B$.

1°) Caractérisations des matrices définies positives.

a) Pour $A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, établir l'équivalence suivante : ($A\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})\Leftrightarrow$ toute valeur propre de A est strictement positive).

b) Lorsque $A=\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, vérifier l'égalité : $a\,{}^tXAX=(ax+by)^2+(ac-b^2)y^2$.

En déduire que : ($\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\in\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})\Leftrightarrow(a>0\text{ et }ac-b^2>0)$).

2°) Exemples.

a) Soient $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}4&0\\0&\frac{5}{3}\end{pmatrix}$:

vérifier que A et B appartiennent à $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ et montrer que $A<B$. A-t-on $A^2<B^2$?

b) Soit $A\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

i) Montrer que A est inversible et que $A^{-1}\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

ii) Pour tout $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on définit l'application : $\phi_X^A:\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}\,;Y\mapsto 2\,{}^tXY-{}^tYAY$

Exprimer, pour tout $H\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\phi_X^A(A^{-1}X+H)-\phi_X^A(A^{-1}X)$ en fonction de H et A.

En déduire que ϕ_X^A admet en $A^{-1}X$ un maximum qui vaut ${}^tXA^{-1}X$.

iii) On considère maintenant $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ vérifiant $A < B$.

Montrer que pour tout X et tout Y matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\left(Y \neq 0 \Rightarrow \phi_X^A(Y) > \phi_X^B(Y)\right)$.

En déduire que $B^{-1} < A^{-1}$.

Partie III : monotonie sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Lorsque F est une application définie sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et à valeur dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on dit que F est strictement croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si : pour tout A et tout B appartenant à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\left(A < B \Rightarrow F(A) < F(B)\right)$.

On dira de même que F est strictement décroissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ lorsque $-F$ est strictement croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Par exemple, la propriété vue au II-2-b-iii se traduit par la stricte décroissance de l'application $F : \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R}); M \mapsto M^{-1}$.

1°) Résultats préliminaires.

On désigne par A une matrice symétrique réelle dont l'ensemble des valeurs propres distinctes $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ est classé dans l'ordre croissant.

On rappelle que : $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} E_{\lambda_i}(A)$ où $E_{\lambda_i}(A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I_n)$.

a) Justifier la relation $A = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i$ où M_i est la matrice de la projection orthogonale sur $E_{\lambda_i}(A)$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Dans toute la suite du problème, une telle écriture s'appelle la décomposition de A.

b) Montrer que $I_n = \sum_{i=1}^{p} M_i$.

c) Donner la décomposition de la matrice $A + tI_n$ lorsque t est réel.

Si A appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et admet la décomposition $A = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i$, on définit, lorsque f est une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, la matrice $\tilde{f}(A) = \sum_{i=1}^{p} f(\lambda_i) M_i$.

On peut ainsi considérer l'application $\tilde{f}$ définie sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\tilde{f} : A \mapsto \tilde{f}(A)$.

2°) a) Montrer que, pour tout A appartenant à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\tilde{f}(A)$ appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et donner la décomposition de $\tilde{f}(A)$ lorsque f est strictement monotone.

b) Préciser $\tilde{f}$ lorsque que $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}; x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

c) Soient $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ deux applications strictement monotones. Montrer que : $\widetilde{f \circ g} = \tilde{f} \circ \tilde{g}$.

d) Lorsque (a,b,c,d) appartient à $\mathbb{R}^4$ avec $c > 0$, $d > 0$ et $bc - ad \neq 0$, on considère l'application $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}; x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Après avoir vérifié que : $\forall x > 0,\ h(x) = \dfrac{bc - ad}{c(cx+d)} + \dfrac{a}{c}$, montrer la stricte monotonie de $\tilde{h}$ sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

3°) Intégrales de matrices.

Soit $M : \mathbb{R}_+^* \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); t \mapsto (m_{i,j}(t))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]}$ où $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]$, $m_{i,j} : t \mapsto m_{i,j}(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Lorsque pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} m_{i,j}(t)\,dt$ converge, on dit que la matrice $\left(\int_0^{+\infty} m_{i,j}(t)\,dt\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]}$ existe et on la note $\int_0^{+\infty} M(t)\,dt$.

a) Résultats préliminaires.

(i) Soient M et N telles que $\int_0^{+\infty} M(t)\,dt$ et $\int_0^{+\infty} N(t)\,dt$ existent.

Montrer que $\int_0^{+\infty} (M(t) + N(t))\,dt$ existe et que : $\int_0^{+\infty} (M(t)+N(t))\,dt = \int_0^{+\infty} M(t)\,dt + \int_0^{+\infty} N(t)\,dt$.

Dans le même ordre d'idée, on admettra les deux propriétés suivantes (ii) et (iii).

(ii) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et h continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^{+\infty} h(t)dt$ converge, et $M : \mathbb{R}_+^* \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); t \mapsto M(t) = h(t)A$,

alors $\int_0^{+\infty} M(t)dt$ existe et $\int_0^{+\infty} M(t)dt = \left(\int_0^{+\infty} h(t)dt\right)A$.

(iii) Soient M telle que $\int_0^{+\infty} M(t)dt$ existe et X une matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

alors $\int_0^{+\infty} {}^tXM(t)Xdt$ converge et ${}^tX\left(\int_0^{+\infty} M(t)dt\right)X = \int_0^{+\infty} {}^tXM(t)Xdt$.

b) On revient à l'application f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\forall x > 0$, $f(x) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right)\varphi(t)dt$ où φ est une application définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs positives, telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{1+t^2}dt$ converge. (cf Partie I).

On suppose que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et admet la décomposition $A = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i$.

i) Montrer que : $\tilde{f}(A) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\left(\frac{t}{1+t^2} I_n - (A + tI_n)^{-1}\right)dt$.

ii) Si $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A < B$, montrer que, pour toute matrice colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, non-nulle, et tout $t > 0$, on a :

$$ {}^tX\left(\frac{t}{1+t^2} I_n - (A + tI_n)^{-1}\right)X < {}^tX\left(\frac{t}{1+t^2} I_n - (B + tI_n)^{-1}\right)X. $$

iii) En déduire que $\tilde{f}$ est strictement croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

c) A l'aide des résultats de la Partie I, vérifier que $\widetilde{\ln}$ est strictement croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Préciser le sens de variation de $\tilde{p}_\alpha$ associée à $p_\alpha : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}; x \mapsto x^\alpha$ selon que $\alpha \in]-1,0[$ ou $]0,1[$.

Partie IV : monotonies comparées de f et $\tilde{f}$

On revient aux notations introduites dans les parties précédentes.

1°) On désigne par f une application de $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que, lorsque $\tilde{f}$ est strictement croissante sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, f l'est aussi sur $\mathbb{R}_+^*$.

2°) Pour $t > 0$, on définit les matrices : $A(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^t + e^{-t}}{2} & \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ \frac{e^t - e^{-t}}{2} & \frac{e^t + e^{-t}}{2} \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} t^3 & 0 \\ 0 & \frac{2}{e^t + e^{-t}} - t^3 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $A(t) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ et donner la décomposition de $A(t)$.

b) Montrer qu'il existe $\eta_0 > 0$ tel que $\forall t \in]0, \eta_0[$, $B(t) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$. (on ne cherchera pas à déterminer une valeur, même approchée, de η_0.)

c) Etablir de même qu'il existe $\eta_1 \in]0, \eta_0[$ tel que $\forall t \in]0, \eta_1[$, $B(t) < A(t)$.

d) Déterminer $\tilde{p}_\alpha(A(t))$ et $\tilde{p}_\alpha(B(t))$ pour tout réel t de $]0, \eta_1[$ lorsque p_α est l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto x^\alpha$.

e) Lorsque $\alpha > 1$, déterminer un équivalent en 0^+ de la quantité $\left(\frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} - t^{3\alpha}\right)\left(\frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} - \left(\frac{2}{e^t + e^{-t}} - t^3\right)^\alpha\right) - \left(\frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2}\right)^2$.

f) En déduire que, pour $\alpha > 1$, $\tilde{p}_\alpha$ n'est pas strictement croissante sur $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

3°) Démontrer que la propriété énoncée en IV-1 n'admet pas de réciproque dès que $n \geq 2$.

***