**MATHEMATIQUES II (S) (épreuve n° 283)**

**ANNEE 2006**

Epreuve conçue par CCIP

Voie Scientifique

| | NBRE CANDIDATS | MOYENNES | ECARTS-TYPE |
|---|---|---|---|
| **RESULTATS GLOBAUX DE L'EPREUVE POUR LA BCE** | 2 947 | 9,94 | 4,96 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **RESULTATS HEC** | 1 977 | 11,60 | 4,73 |

| VOIE PREPARATOIRE | | | |
|---|---|---|---|
| Scientifique | 2 947 | 9,94 | 4,96 |

# BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteurs : H.E.C. – E.S.C.P. – E.A.P.

CODE EPREUVE :

283

CCIP_M2_S

OPTION : SCIENTIFIQUE

## MATHEMATIQUES II

Mercredi 10 Mai 2006, de 14 h. à 18 h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*
*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

---

Le problème a pour objet l'étude de quelques propriétés concernant le nombre de racines réelles d'un polynôme de degré $n$, $(n \geqslant 1)$, à coefficients réels fixés ou aléatoires.

Dans les parties II et III, les polynômes considérés sont à coefficients réels et on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.

Pour toute fonction $\Psi$ dérivable sur son domaine de définition, la dérivée de $\Psi$ est notée $\Psi'$.

Les quatre parties du problème sont, dans une large mesure, indépendantes.

### Partie I. Nombre de racines réelles d'un polynôme du second degré à coefficients aléatoires

On considère dans cette partie, deux variables aléatoires réelles $X_0$ et $X_1$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi.
Pour tout $\omega$ de $\Omega$, on considère le polynôme $Q_\omega$ d'indéterminée $y$, défini par :

$$Q_\omega(y) = y^2 + X_1(\omega)y + X_0(\omega)$$

On désigne par $M(\omega)$ *le nombre de racines réelles de* $Q_\omega$.

1. Montrer que l'application $M$ qui, à tout $\omega$ de $\Omega$ associe $M(\omega)$, est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2. Soit $Z$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p$ ($p \in ]0, 1[$). On suppose dans cette question que $X_0$ et $X_1$ suivent la même loi que $2Z - 1$.

a) Déterminer la loi de $X_0$.

b) Déterminer la loi de $M$ et calculer son espérance $E(M)$.

*Dans les questions suivantes, on suppose que $X_0$ et $X_1$ suivent une même loi exponentielle de paramètre $1/2$.*
On pose : $Y_0 = -4X_0$, $Y_1 = X_1^2$, $Y = Y_1 + Y_0$, et on note $F_{Y_0}, F_{Y_1}$ et $F_Y$, les fonctions de répartition de $Y_0, Y_1$ et $Y$, respectivement.

3. Montrer que l'on a, pour tout $x$ réel :

$$F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\sqrt{x}/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad F_{Y_0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ e^{x/8} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En déduire l'expression d'une densité $f_{Y_0}$ de $Y_0$ et d'une densité $f_{Y_1}$ de $Y_1$.

4. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} \times \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t}{4}+\sqrt{t}\right)\right]$, où exp désigne la fonction exponentielle.

a) Établir la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$.

b) En déduire qu'une densité $f_Y$ de la variable aléatoire $Y$ est donnée, pour tout $x$ réel, par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{32}e^{x/8}\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{32}e^{x/8}\displaystyle\int_x^{+\infty} g(t)dt & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

5. On désigne par $\Phi$ la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée, réduite.

a) Justifier la validité du changement de variable $u = \sqrt{t}$ dans l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$.

b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt = 4\sqrt{e}\int_1^{+\infty} e^{-v^2/2}dv$, et donner, pour tout réel $x$ négatif, l'expression de $f_Y(x)$ en fonction de $\Phi$.

c) Montrer que, pour tout réel $x$ positif, on a : $f_Y(x) = \dfrac{\sqrt{2\pi e}}{8}e^{x/8}\left[1-\Phi\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}+1\right)\right]$.

d) Déterminer la loi de $M$ et son espérance $E(M)$ (on fera intervenir le nombre $\Phi(1)$).

### Partie II. Suites de Sturm

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 1, et soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ un polynôme normalisé ($a_n = 1$) donné, à coefficients réels. *On suppose que toutes les racines réelles de $P$ sont simples.*

L'objectif de cette partie est de décrire un algorithme permettant de déterminer le nombre de racines réelles de $P$ appartenant à un intervalle donné $[a, b]$.

On associe au polynôme $P$, la suite $(R_i)_{i\geqslant 0}$ de polynômes définie de la manière suivante : $R_0 = P, R_1 = -P'$, et pour tout entier $j$ tel que $R_{j+1} \neq 0$, le polynôme $R_{j+2}$ est l'opposé du reste de la division euclidienne de $R_j$ par $R_{j+1}$. Si $R_{j+1} = 0$, on pose $R_{j+2} = 0$.

1. Montrer qu'il existe un entier $k$ ($k \geqslant 2$), tel que $R_k = 0$. On note $R_m$, ($m \geqslant 1$), le dernier polynôme non nul de la suite $(R_i)_{i\geqslant 0}$.

Dans toute cette partie, on pose :

$$\begin{cases} R_0 = S_1R_1 - R_2 \\ R_1 = S_2R_2 - R_3 \\ \quad\vdots \\ R_{m-2} = S_{m-1}R_{m-1} - R_m \\ R_{m-1} = S_mR_m \end{cases}$$

2. a) Montrer que s'il existe un entier $j$ de $[\![0, m-1]\!]$ et un réel $x_0$ tels que $R_j(x_0) = R_{j+1}(x_0) = 0$, alors $P(x_0) = P'(x_0) = 0$.

b) En déduire que le polynôme $R_m$ n'admet pas de racine réelle.

c) Soit $j$ un entier de $[\![1, m-1]\!]$. Montrer que si $x_0$ est une racine réelle de $R_j$, alors $R_{j-1}(x_0) \times R_{j+1}(x_0) < 0$.

3. Soit $s = (s_1, s_2, \ldots, s_t)$ une $t$-liste ($t \geqslant 2$) de nombres réels non tous nuls. On ôte de $s$ tous les éléments nuls en préservant l'ordre, et on obtient ainsi une $p$-liste ($p \leqslant t$) $\widehat{s} = (\widehat{s_1}, \widehat{s_2}, \ldots, \widehat{s_p})$. On appelle *nombre de changements de signe de $s$*, le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathcal{E}$ défini par : $\mathcal{E} = \{i \in [\![1, p-1]\!] \mid \widehat{s_i}\widehat{s_{i+1}} < 0\}$.
Si $p = 1$, on dit que le nombre de changements de signe est nul.
Par exemple, si $s = (0, 3, 0, 5, -3, 2)$, on a : $\widehat{s} = (3, 5, -3, 2)$, et le nombre de changements de signe est égal à 2.

Pour tout réel $x$, on note respectivement $C_1(x)$, $C_2(x)$ et $C(x)$, le nombre de changements de signe du couple $(R_0(x), R_1(x))$, de la $m$-liste $(R_1(x), R_2(x), \ldots, R_m(x))$, et de la $(m+1)$-liste $(R_0(x), R_1(x), R_2(x), \ldots, R_m(x))$.
On désigne par $x_0$ une racine réelle du polynôme $P$.

a) En étudiant les variations de $P$ au voisinage de $x_0$, montrer qu'il existe un réel $\delta_1 > 0$ tel que, si $h \in ]0, \delta_1[$, on a : $C_1(x_0+h) - C_1(x_0-h) = 1$.

b) À l'aide de la question 2. c), montrer qu'il existe un réel $\delta_2 > 0$ tel que, si $h \in ]0, \delta_2[$, on a : $C_2(x_0+h) = C_2(x_0-h)$ (on distinguera les deux éventualités : soit, $x_0$ n'est racine d'aucun des polynômes $R_1, R_2, \dots, R_m$, soit, il existe un entier $j$ de $[\![1, m-1]\!]$ tel que $R_j(x_0) = 0$).

c) Déduire des deux questions précédentes que pour $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ et $h \in ]0, \delta[$, on a $C(x_0+h) - C(x_0-h) = 1$, et que si $a$ et $b$ sont deux réels qui ne sont pas racines de $P$ et qui vérifient $a < b$, alors le nombre de racines réelles de $P$ dans $[a, b]$ est égal à $C(b) - C(a)$.

4. a) Soit $\alpha$ une racine (réelle ou complexe) de $P$. Montrer que si $|\alpha| \geqslant 1$, alors $|\alpha|^n \leqslant |\alpha|^{n-1} \times \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$. En déduire, pour toute racine $\alpha$ de $P$, l'inégalité : $|\alpha| \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$.

b) Écrire en français, un algorithme permettant de déterminer le nombre de racines réelles de $P$.

5. On définit en Pascal

```
const n = ... ;
Type tab = array[1..n] of real ;
Var T : tab ;
```

Écrire une fonction Pascal dont l'en-tête est `Function nbchgs(T : tab) : integer` qui donne le nombre de changements de signe dans la suite de réels (`T[1], T[2],..., T[n]`).
On tiendra compte du fait que le tableau `T` peut contenir des éléments nuls. La fonction `nbchgs` n'utilisera que le tableau `T` et aucun autre tableau auxiliaire. On expliquera en français la démarche utilisée.

### Partie III. Un majorant du nombre de racines réelles de $P$

Soit $V$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $V(X) = v_m X^m + v_{m-1}X^{m-1} + \cdots + v_1 X + v_0$, avec $v_m \neq 0$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On note $V^*$ le polynôme réciproque du polynôme $V$, défini par : $V^*(X) = v_0 X^m + v_1 X^{m-1} + \cdots + v_{m-1}X + v_m$. Soit $n$ un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère l'application $T$ qui, à tout polynôme $P$ de degré $n$, normalisé, à coefficients réels, $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, associe le polynôme $T(P)$ défini par $T(P)(X) = XP'(X)$.

On désigne par $N_0(P)$ le nombre de racines non nulles de $P$ dans l'intervalle $[-1, 1]$ comptées avec leurs ordres de multiplicité, par $N_1(P)$ le nombre de racines de $P$ dans $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ comptées avec leurs ordres de multiplicité, et par $N(P)$ le nombre de racines réelles de $P$ comptées avec leurs ordres de multiplicité.

1. a) Établir, à l'aide du théorème de Rolle, l'inégalité : $N_1(P) \leqslant N_1(T(P)) + 2$.

b) Pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, on pose $T^k = T \circ T \circ \cdots \circ T$ ($k$ fois). Montrer que $N_1(P) \leqslant N_1(T^k(P)) + 2k$.

2. a) Montrer que pour tout réel $x$ non nul, on a $P^*(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$.

b) Montrer que $N_1(P) = N_0(P^*)$.

3. Pour tout réel $x$ et pour tout entier naturel $k$ non nul, on pose :
$Q_k(x) = 1 + a_{n-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k x + a_{n-2}\left(1 - \frac{2}{n}\right)^k x^2 + \cdots + a_1\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^k x^{n-1}$. Montrer que $(T^k(P))^* = n^k Q_k$.

4. a) Établir, pour tout réel $y$ de $[0, 1]$, l'inégalité : $(1-y)e^y \leqslant 1$.

b) On **admet** la propriété suivante : soit $r$ et $\rho$ deux réels tels que $0 < r < \rho$. On note $D_\rho = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| \leqslant \rho\}$. Soit $U$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $U(0) \neq 0$. Soit $\mu$ un réel strictement positif tel que pour tout $z$ de $D_\rho$, $|U(z)| \leqslant \mu$. Alors, le nombre de racines réelles de $U$ comptées avec leurs ordres de multiplicité, dans l'intervalle $[-r, r]$, est majoré par le réel : $\dfrac{1}{\ln\left(\frac{\rho}{r}\right)} \times \ln\left(\dfrac{\mu}{|U(0)|}\right)$.

En appliquant cette propriété au polynôme $Q_k$ avec $r = 1$ et $\rho = e^{k/n}$, ($k \in \mathbb{N}^*$), déduire des questions précédentes que pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, on a : $N_1(P) \leqslant 2k + \frac{n}{k}\ln(L(P))$, avec $L(P) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$.

c) Soit $\psi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\psi(x) = 2x + \dfrac{\theta}{x}$, où $\theta$ est un paramètre réel positif.

i) Étudier les variations de $\psi$.

ii) Montrer que $\psi(\sqrt{\theta/2} + 1) \leqslant 2 + 2\sqrt{2\theta}$.

iii) En déduire l'inégalité : $N_1(P) \leqslant 2 + 2\sqrt{2n\ln(L(P))}$.

d) En supposant $a_0 \neq 0$, on démontrerait de même (et on admettra dans la suite du problème) que :

$$N_0(P) \leqslant 2 + 2\sqrt{2n\ln\left(\frac{L(P)}{|a_0|}\right)}$$

Conclure en donnant un majorant de $N(P)$, fonction des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$.

**Partie IV. Nombre de racines réelles d'un polynôme de degré $n$ à coefficients aléatoires**

Pour $n$ entier supérieur ou égal à 2, on considère dans cette partie, les variables aléatoires réelles $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre $\lambda$, strictement positif.

Pour tout $\omega$ de $\Omega$, on considère le polynôme $Q_\omega$ d'indéterminée $y$, défini par :

$$Q_\omega(y) = y^n + X_{n-1}(\omega)y^{n-1} + \cdots + X_1(\omega)y + 1$$

Soit $M_n(\omega)$ le nombre de racines réelles de $Q_\omega$. On admet que l'application $M_n : \omega \mapsto M_n(\omega)$ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. On définit la variable aléatoire $L_n$ par : $L_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} X_i$. Soit $Z_n = L_n - 2$. Rappeler la loi de $Z_n$.

2. À l'aide des résultats de la partie III, montrer que pour tout $\omega$ de $\Omega$, on a :

$$M_n(\omega) \leqslant 4 + 4\sqrt{2n} \times \sqrt{\ln(Z_n(\omega) + 2)}$$

3. Soit $h$ une fonction de classe $C^2$, concave sur $\mathbb{R}^+$. Soit $W$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose l'existence des espérances $E(W)$ et $E(h(W))$.

a) Montrer que, pour tout couple $(x_0, x)$ de réels positifs, on a : $h(x) \leqslant h'(x_0)(x - x_0) + h(x_0)$.

b) En prenant $x_0 = E(W)$, établir l'inégalité suivante : $E(h(W)) \leqslant h(E(W))$.

4. a) Montrer que la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\varphi(x) = \sqrt{\ln(x+2)}$ est concave sur $\mathbb{R}^+$.

b) Soit $a$ un réel positif. Montrer que la série de terme général $\sqrt{\ln(k+2)} \times \dfrac{a^k}{k!}$ est convergente.

5. a) Prouver l'existence de l'espérance $E(M_n)$.

b) Montrer que, pour tout réel $\beta$ strictement supérieur à $1/2$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{E(M_n)}{n^\beta} = 0$$

*** FIN ***

# Mathématiques II - Option scientifique
# Rapport de correction
Session 2006

- ℘ -

**N.B.** : Cette épreuve est désormais commune à quatre écoles : H.E.C., E.S.C.P.-E.A.P., E.S.S.E.C et E.M. Lyon.

## 1 Présentation du problème

Le problème avait pour objet, d'une part de proposer un algorithme pour compter et localiser les racines réelles d'un polynôme à coefficients réels et, d'autre part, de donner un ordre de grandeur (en moyenne) du nombre de racines réelles d'un polynôme à coefficients aléatoires.

La méthode de Sturm est la plus connue pour déterminer le nombre de racines réelles dans un intervalle $[a, b]$ d'un polynôme n'ayant que des racines réelles simples. L'étude de cette méthode est proposée dans la seconde partie du problème. Notons qu'il ne s'agit pas de la seule méthode de détermination du nombre de racines réelles d'un polynôme. Il existe une méthode qui s'affranchit de l'hypothèse de la simplicité des racines, basée sur l'étude de formes quadratiques (de Hankel) formées à l'aide des sommes de Newton du polynôme (voir par exemple [4] tome 2). Il existe une méthode de localisation des racines moins connue, due à Vincent, qui s'appuie sur une utilisation des fractions continues et qui nécessite en général moins de calculs que la méthode de Sturm (voir [1], [2] pour un commentaire historique et aussi [5]). Nous remercions L. Dumas qui nous a signalé ces références.
Les techniques de localisation des racines réelles sont utiles, par exemple, pour analyser le comportement de systèmes dynamiques linéaires vectoriels :

$$X_{n+1} = AX_n$$

*via* l'étude des racines réelles du polynôme caractéristique de la matrice $A$. Ces systèmes dynamiques trouvent un cadre d'application en économie. La modélisation peut prendre en compte un environnement aléatoire et c'est la raison pour laquelle la matrice $A$ ainsi que son polynôme caractéristique peuvent présenter des coefficients aléatoires. Il convient alors de transposer les résultats obtenus dans un cadre déterministe à un cadre probabiliste. Le lecteur soucieux de trouver d'autres applications et quelques éléments de théorie sur la question pourra consulter [3] et les éléments de bibliographie qui s'y trouvent.

Le choix de ces thématiques a présenté quelques avantages :
1) Il a permis d'évaluer les candidats sur un grand nombre de notions proposées par le programme, en leur offrant des questions de difficulté graduelle,
2) Il a offert l'opportunité de tester les candidats sur des questions de nature technique ou d'autres questions plus formelles qui supposaient une aptitude à la démonstration, ou bien une prise d'initiative dans le raisonnement. L'évaluation se faisait donc sur les diverses qualités que l'on peut attendre d'un candidat.

L'équipe de correction a été agréablement surprise de la réactivité témoignée par certains candidats face à des questions à propos desquelles on aurait pu attendre qu'ils fussent déstabilisés. En outre, elle tient à signaler que les copies sont dans leur immense majorité bien présentées.

Le problème était divisé en quatre parties indépendantes et de difficulté inégale. Chacune était conçue, eu égard à la mission d'évaluation et de classement des étudiants, selon des objectifs différents. Le poids de chacune des trois premières parties était égal, de l'ordre de 27%. Certaines copies, qui se démarquaient par des qualités de rigueur, de probité scientifique ou encore par des initiatives inspirées se voyaient accorder un bonus inclus dans la note finale.

La première partie, de facture classique, portait sur le programme de probabilités lié à l'analyse. La première question mise à part, il était demandé de maîtriser des points techniques étudiés de manière intensive par tous et permettait une première sélection sur un plus petit dénominateur commun du programme. La première question, discriminante, donnait une première idée de la valeur de la copie, surtout lorsqu'elle était résolue correctement.
La seconde partie était plus originale si l'on se réfère à l'enseignement de la filière. Elle portait sur des questions d'algèbre ou d'informatique (en fin de partie). Les bons candidats ont pu s'y distinguer, et se distinguer entre eux, en mettant en lumière leur aptitude à comprendre un problème et à raisonner de manière scientifique.

La troisième partie portait sur l'algèbre et l'analyse. Certaines questions, comme dans la première partie, concernaient des points très élémentaires du programme et permettaient de départager les candidats d'un niveau faible ou moyen. *A contrario*, d'autres questions dans cette même partie nécessitaient plus d'habileté technique et départageaient de meilleurs candidats. Une démonstration par récurrence, *a priori* simple, a été discriminante, et ceci de manière surprenante.
La quatrième partie, enfin, portait sur des questions de probabilités discrètes et d'analyse. Elle a été abordée - à profit - par de nombreux candidats. Elle ne recélait pas de difficulté majeure.

Un candidat ayant résolu une bonne moitié du problème se voyait gratifié de la note maximale.

# 2 Les résultats obtenus

Sur l'ensemble des 2947 candidats qui ont composé, la note moyenne s'établit à 9,94 sur 20. Les 1977 candidats qui ont concouru pour l'admission à H.E.C obtiennent une moyenne de 11,60 et l'écart-type de la distribution de leurs notes est 4,73. Pour les 2459 candidats qui ont brigué une place à l'E.S.C.P.-E.A.P., la moyenne est 10,85 et l'écart-type est 4,78. Les statistiques concernant les autres écoles ne nous sont pas parvenues au moment de la rédaction de ce rapport. De l'avis de l'ensemble des correcteurs, l'épreuve a largement permis de départager les candidats. Les statistiques précédentes sont complétées par un écart-type sur la population totale des candidats de 4,96 et corroborent par conséquent cette opinion.

# 3 Erreurs fréquentes et remarques de l'équipe de correction

## 3.1 Partie I

**I.1** Très peu de candidats traitent cette question convenablement, faute de savoir ce qu'ils doivent démontrer. Certains expriment les racines en fonction de $X_0$ et $X_1$, question qui n'est pas demandée... D'autres pensent à considérer le discriminant, mais ne disent pas qu'il est de même nature (discrète ou continue) que $X_0$ (ou $X_1$), même si cela n'est pas indispensable puisque le programme invite à considérer l'espace vectoriel des variables aléatoires et indique que le produit de deux variables aléatoires est encore une variable aléatoire. Cette question a été nettement discriminante.
**I.2.a et 2.b** Questions sans réelle difficulté et bien traitées par la majorité des candidats.

Certains, toutefois, confondent "$X_0$ et $X_1$ ont la même loi" avec "$X_0$ et $X_1$ sont égales".
**I.3** Il était important de discuter du signe de la variable $x$ *avant* de considérer sa racine carrée ! En outre, un nombre trop important de candidats écrit :
" $F_{Y_1}$ étant continue et dérivable sauf peut-être en un nombre fini de points..."
alors que $F_{Y_1}$ est explicite et que, par conséquent, les points où cette fonction n'est pas dérivable le sont aussi. En outre, il convient de vérifier la continuité de $F_{Y_1}$ (et $F_{Y_0}$) sur $\mathbb{R}$.
**I.4.a** Beaucoup voient que l'intégrale est doublement généralisée et beaucoup pensent à signaler que la fonction $g$ à intégrer est positive et continue (sauf en zéro). En $+\infty$, la formule miracle est
"$g(t) = o(\frac{1}{t^2})$ par croissances comparées"
ce qui, compte tenu de l'expression de $g$ demandait à être précisé. La question en zéro est en général bien traitée, même si certains candidats prolongent la fonction $g$ par continuité en 0 ...
**I.4.b** Trop de candidats font usage de la formule de convolution sans justifier son application : indépendance des variables $Y_0$ et $Y_1$ - qu'il faut aussi justifier - et l'une des deux densités est bornée. La distinction des cas $x \geq 0$ et $x < 0$ se fait parfois *a posteriori* parce que l'énoncé enjoint les candidats de le faire... Concernant ce point, la rédaction n'est pas toujours soigneuse, et les candidats ont aussi été évalués sur ce critère.
**I.5.a** Beaucoup trop de candidats affirment que $t \mapsto \sqrt{t}$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}^+$. Les correcteurs ont pu distinguer ceux qui savaient apporter du soin dans la rédaction.
**I.5.b,c et d** Ces questions ont été correctement traitées par ceux qui les abordaient.

## 3.2 Partie II

**II.1** Certains ont confondu la suite des polynômes $R_i$ avec la suite des dérivées successives de $P$ (au signe près, éventuellement).
**II.2.a** Certains commencent par montrer que $R_{j+2}(x_0) = 0$ puis amorcent une récurrence ascendante. Une rédaction soigneuse était attendue pour obtenir la note maximum sur cette question. On pouvait procéder par exemple en nommant chaque relation.
**II.2.b** La dernière relation fournie n'est pas explicitement mentionnée ce qui rend imprécise la rédaction. Cette question, comme celle qui précédait permettait de juger les candidats sur leur aptitude à l'expression écrite.
**II.2.c** Trop de candidats montrent seulement que $R_{j-1}(x_0)R_{j+1}(x_0) \leq 0$ et n'expliquent pas pourquoi le produit est non nul.

*Les trois questions qui suivent étaient nettement discriminantes et permettaient de jauger les candidats selon leur aptitude au raisonnement et leur capacité à comprendre un mécanisme mathématique nouveau.*

**II.3.a** Trop peu de candidats citent explicitement la continuité de $P'$. Un peu plus en revanche savent exploiter le fait que $x_0$ est une racine simple.
**II.3.b** Il était attendu là encore de citer la continuité des polynômes $R_j$, de remarquer à l'aide de II.2.c que le nombre de changements de signe du triplet $(R_{j-1}(x), R_j(x), R_{j+1}(x))$ ne dépendait pas du signe de $R_j$ au voisinage de $x_0$, que $x_0$ soit racine de $R_j$ ou non. Il s'agissait aussi de remarquer que le nombre de changements de signe s'additionnait sur les triplets (intérieurs). On a lu une bonne compréhension de la question sur certaines copies - et elle était alors largement primée - même si la rédaction manquait souvent de précision.
**II.3.c** La question la plus délicate : rien dans ce qui précède ne permettait d'affirmer que sur tout intervalle $[x, y]$ ne contenant pas de racine de $P$, le nombre de changements de signe de la $(m+1)$-liste ne variait pas. Certains, ont compris implicitement qu'il fallait utiliser ce résultat, et ont été largement primés pour cela, mais il semblerait que personne, de manière explicite, n'ait soulevé la difficulté.
**II.4.a** L'usage de l'inégalité triangulaire est encore trop souvent approximatif. Beaucoup oublient de considérer les racines de module inférieur à un (pour lesquelles l'inégalité demandée est évidente), ou bien quelques uns ne considèrent que la racine nulle...

**II.4.b** Cette question visait juste à tester la compréhension de la méthode de Sturm. Rares sont ceux qui cherchent à calculer $C(A) - C(-A)$ avec $A > 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$.
**II.4.c** L'usage d'un tableau intermédaire réduisait de moitié la note sur cette question. La distinction s'opérait sur ceux qui savaient s'affranchir des problèmes des zéros du tableau. Cette question, ainsi que la précédente, n'a pas été suffisamment abordée.

## 3.3 Partie III

**III.1.a** Certains, en très petit nombre seulement, ont considéré les racines *avec leur multiplicité* et ont remarqué simultanément qu'une des racines obtemues par l'application du théorème de Rolle (que les candidats connaissent bien en général) pouvait être dans $]-1,1[$. Ces deux difficultés étaient largement primées. Beaucoup font sortir le 2 du chapeau...
**III.1.b** Trop de candidats proposent une démonstration par récurrence où apparaît un calcul du type :

$$N_1(T^{k+1}(P)) = N_1(T^k(T(P))) \leq N_1(T(P) + 2k) \leq ...$$

À la grande surprise des correcteurs, cette question a été discriminante.
**III.2.a** Cette question, facile, est traitée par presque tous les candidats.
**III.2.b** La question de la multiplicité des racines n'est que rarement abordée. Le fait que $N_0$ ne compte que les racines *non nulles* n'est en général pas dit de manière explicite et les candidats se contentent de considérer une racine non nulle pour pouvoir prendre son inverse.
**III.3** Quelques candidats ont remarqué que $T$ est linéaire (si on l'étend à $\mathbb{R}_n[X]$, et ce point n'a troublé personne). Un calcul direct permettait de gagner du temps.
**III.4.a** Fait partie des questions élémentaires traitées par (presque) tous les candidats. On attendait toutefois les limites aux bornes et la valeur du minimum atteint par $\varphi$ sur l'intervalle.
**III.4.b** Rares sont les candidats qui montrent avec précision que l'on peut choisir $\mu = L(P)$ à l'aide des questions précédentes.
**III.4.c**
*i*) Bien traitée, en général
*ii*) Bien traitée par un bon nombre de candidats
*iii*) La valeur $\theta = n\ln(L(P))$ est en général précisée. En revanche, très peu de candidats disent que l'inégalité précédente est obtenue pour *toutes* les valeurs de $k$ entier et que l'on peut le choisir dans l'intervalle suggéré par l'énoncé (qui contient un entier).
**III.4.d** La majoration, lorsqu'elle est proposée, est en général la bonne.

## 3.4 Partie IV

**IV.1** Trop de candidats oublient de mentionner l'indépendance des $X_i$. La stabilité de la loi de Poisson est bien connue et il était inutile de démontrer cette propriété.
**IV.2** Immédiate et bien traitée.
**IV.3.a** La grande majorité des candidats savent ce qu'est une fonction concave.
**IV.3.b** Il était attendu, soit d'utiliser le théorème de transfert, soit de remplacer $x$ par $W$ puis d'utiliser, en le signalant, la positivité et la linéarité de l'espérance.
**IV.4.a** Un simple calcul, bien fait en général.
**IV.4.b** Ceux qui écrivaient juste $\sqrt{\ln(k+2)}\frac{a^k}{k!} = o(\frac{1}{k^2})$ n'étaient pas primés. Il fallait justifier cette relation (par exemple en remarquant que $\sqrt{\ln(k+2)} \leq k$). Certains ont pensé à utiliser la concavité de $\varphi$ et l'inégalité obtenue en IV.3.a. (avec $x_0 = 0$ et $x = k$) pour obtenir une majoration qui permettait de conclure
**IV.5.a** L'argument $M_n(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ suffisait !
**IV.5.b** Les croissances comparées sont assez bien maîtrisées.

## Références

[1] AKRITAS, A.G., *A new method for polynomial real root isolation*,

[2] AKRITAS, A.G., DANIELOPOULOS, S.D., *On a forgotten theorem of Mr Vincent*, Historia Mathematica 1978, 427-435. Les deux références de A.G. Akritas peuvent être téléchargées à partir de la page personnelle de A.G. Akritas : *http ://www.inf.uth.gr/˜ akritas/.*

[3] BHARUCHA REID, A.F. *Random Polynomials*, Academic Press, (1986).

[4] GANTMACHER, F.,R. *Théorie des matrices*, Dunod, (1966) vol I et II.

[5] USPENSKI, J.V., *Theory of equations*, New York, Mc Graw-Hill, (1948).

- ℘ -