c) Vérifier l'égalité : $E(W_n) - V(W_n) = n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2m} - n(n-1)\left(1-\frac{2}{n}\right)^m$.
En déduire que $E(W_n) - V(W_n) \geqslant 0$.

3. Dans cette question, l'entier m vérifie $m = \lfloor n\ln n + \theta n\rfloor$, où θ est une constante réelle positive et $\lfloor x\rfloor$ désigne la partie entière de x.

a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(W_n)$.

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (E(W_n) - V(W_n)) = 0$.

c) Soit T_n une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\mu_n = E(W_n)$.
On admet que pour tout k de $\mathbb{N}$, on a :

$$|P([W_n = k]) - P([T_n = k])| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\mu_n}\right) \times (\mu_n - V(W_n))$$

Quelle est la limite en loi de la suite de variables aléatoires $(W_n)_{n\geqslant 3}$?

4. On pose $\mu = e^{-\theta}$, et on suppose que le paramètre μ est inconnu. Dans cette question, on veut estimer μ.
Pour p entier de $\mathbb{N}^*$, on considère un p-échantillon indépendant, identiquement distribué $(T_1, T_2, \ldots, T_p)$ de la loi de Poisson de paramètre μ. On pose :

$$\overline{T_p} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} T_i \quad \text{et} \quad U_p = \sqrt{p}\,\frac{\overline{T_p} - \mu}{\sqrt{\mu}}$$

a) Montrer que $\overline{T_p}$ est un estimateur sans biais et convergent du paramètre μ.

b) Quelle est la limite en loi de la suite de variables aléatoires $(U_p)_{p\geqslant 1}$?

c) On veut construire, pour p assez grand, un intervalle de confiance du paramètre μ au risque α donné. Soit u le réel strictement positif tel que $P([U \geqslant u]) = \alpha/2$, où U est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.
Justifier que pour p assez grand, on peut écrire : $P([|U_p| \leqslant u]) = 1 - \alpha$, et déterminer alors un intervalle de confiance $[I_p, J_p]$ pour μ au risque α.

Partie II

Dans cette partie, λ désigne un réel strictement positif.
Soit M une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.
Soit A une partie quelconque de $\mathbb{N}$ et $\overline{A}$ son complémentaire dans $\mathbb{N}$. On rappelle que si A est non vide, alors, $P([M \in A]) = \sum\limits_{i\in A} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$, et on pose par convention $[M \in \emptyset] = \emptyset$.
On considère la fonction f_A définie sur $\mathbb{N}$ par $f_A(0) = 0$, et pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$f_A(k+1) = \frac{k!}{\lambda^{k+1}}e^{\lambda}\left(P([M\in A]\cap[M\leqslant k]) - P([M\in A]) \times P([M\leqslant k])\right)$$

1. a) Déterminer la fonction f_A dans les cas particuliers $A = \emptyset$ et $A = \mathbb{N}$.

b) Donner l'expression de $f_A(1)$ en fonction de λ et de $P([M \in A])$ dans les deux cas suivants : $0 \in A$ et $0 \in \overline{A}$.
Exprimer $f_A(2)$ en fonction de λ et de $P([M \in A])$ dans le cas où 0 et 1 appartiennent à A.

2. Soit A et B deux parties de $\mathbb{N}$ disjointes.

a) Montrer que $f_{A\cup B} = f_A + f_B$.

b) En déduire que $f_{\overline{A}} = -f_A$.

3. a) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$, la fonction f_A vérifie la relation suivante :

$$\lambda f_A(k+1) - k f_A(k) = \begin{cases} P([M \in \overline{A}]) & \text{si } k \in A \\ -P([M \in A]) & \text{si } k \in \overline{A} \end{cases}$$

b) En déduire que si A est non vide et distincte de $\mathbb{N}$, la fonction f_A n'est pas identiquement nulle.

4. *Dans cette question, j est un entier naturel non nul, et A est le singleton $\{j\}$.* On pose $f_{\{j\}} = f_j$.

a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, montrer l'égalité suivante :

$$f_j(k+1) = \begin{cases} \dfrac{k!}{j!\lambda^{k-j+1}} P([M \geqslant k+1]) & \text{si } k \geqslant j \\ -\dfrac{k!}{j!\lambda^{k-j+1}} P([M \leqslant k]) & \text{si } k < j \end{cases}$$

b) Calculer $f_j(j+1) - f_j(j)$, et déterminer son signe.

c) Calculer pour tout k de $\mathbb{N}^*$, différent de j, $f_j(k+1) - f_j(k)$ en distinguant les deux cas : $k > j$ et $k < j$. En déduire que la différence $f_j(k+1) - f_j(k)$ est positive si et seulement si $k = j$.

d) Établir les inégalités suivantes : $f_j(j+1) - f_j(j) \leqslant \dfrac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \leqslant \min\left(1, \dfrac{1}{\lambda}\right)$.

5. On considère le singleton $\{0\}$ et on pose $f_{\{0\}} = f_0$. Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, l'inégalité suivante : $f_0(k+1) - f_0(k) \leqslant 0$.

6. a) Établir pour tout k de $\mathbb{N}$, l'inégalité suivante : $f_A(k+1) - f_A(k) \leqslant f_k(k+1) - f_k(k)$.
(on distinguera les deux cas : $k \in A$ et $k \in \overline{A}$)

b) En déduire, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, l'inégalité suivante :

$$\sup_{k \geqslant 0} |f_A(k+1) - f_A(k)| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$$

Partie III.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère n variables aléatoires discrètes indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la variable aléatoire X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i strictement positif.

On pose $\lambda_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i$, $W_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ et, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $R_i = W_n - X_i$.

On note M_n une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ_n. Soit A une partie quelconque de $\mathbb{N}$, et f_A la fonction définie dans la partie II, dans l'expression de laquelle on remplace M par M_n et λ par λ_n. On pose $f = f_A$.

1. a) Établir pour tout i de $[\![1, n]\!]$, l'égalité des deux variables aléatoires $X_i f(W_n)$ et $X_i f(1 + R_i)$.

b) En déduire pour tout i de $[\![1, n]\!]$, l'égalité : $E(X_i f(W_n)) = p_i E(f(1 + R_i))$.

2. Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on pose : $Y_i = f(1 + W_n) - f(1 + R_i)$.

Établir la relation suivante : $E(\lambda_n f(1 + W_n) - W_n f(W_n)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i E(Y_i)$.

3. a) Établir pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la formule suivante :

$$E(Y_i / [X_i = 1]) = E(f(2 + R_i) - f(1 + R_i))$$

b) Calculer pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $E(Y_i / [X_i = 0])$.

c) Déduire des questions précédentes l'égalité suivante :

$$E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 E(f(2+R_i) - f(1+R_i))$$

4. Établir l'inégalité suivante :

$$|E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n))| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times \sum_{i=1}^{n} p_i^2$$

5. À l'aide de la question II.3.a, montrer, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, l'égalité suivante :

$$E(\lambda_n f(1+W_n) - W_n f(W_n)) = P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])$$

En déduire, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, la majoration suivante :

$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times \sum_{i=1}^{n} p_i^2$$

6. Dans cette question uniquement, on suppose que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $p_i = \dfrac{1}{n+i}$.

a) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda_n$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} p_i^2 = 0$.

b) Déterminer la limite en loi de la suite $(W_n)_{n \geqslant 2}$.

Partie IV.

Les notations sont identiques à celles de la partie III, mais les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, **ne sont pas nécessairement indépendantes.**

1. a) Montrer que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a : $E(X_i f(W_n)) = p_i E(f(1+R_i)/[X_i = 1])$.

b) En déduire l'égalité suivante : $P([W_n \in A]) - P([M_n \in A]) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \Big[E(f(1+W_n)) - E(f(1+R_i)/[X_i = 1])\Big]$.

2. On suppose que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, il existe une variable aléatoire Z_i définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que la loi de Z_i soit identique à la loi conditionnelle de R_i sachant $[X_i = 1]$.

a) Justifier, pour tout couple (ℓ, j) d'entiers naturels, l'inégalité : $|f(\ell) - f(j)| \leqslant |\ell - j| \times \min\left(1, \dfrac{1}{\lambda_n}\right)$, et en déduire la majoration suivante : $|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leqslant \min\left(1, \dfrac{1}{\lambda_n}\right) \times \sum\limits_{i=1}^{n} p_i E(|W_n - Z_i|)$.

b) On suppose de plus que pour tout ω de Ω, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a $W_n(\omega) \geqslant Z_i(\omega)$. Établir l'égalité : $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i E(|W_n - Z_i|) = \lambda_n - V(W_n)$, où $V(W_n)$ désigne la variance de W_n.

En déduire, pour toute partie A de $\mathbb{N}$, l'inégalité suivante :

$$|P([W_n \in A]) - P([M_n \in A])| \leqslant \min\left(1, \frac{1}{\lambda_n}\right) \times (\lambda_n - V(W_n))$$