a) Montrer que la série de terme général $v_n$ est convergente.

b) En déduire la convergence de la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ ; on note $\gamma$ sa limite.

c) On pose pour tout réel $t > 0$ : $d_{n,t} = \gamma + \ln(t+n) - h_n$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} d_{n,t}$.

2. a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $E(X_t)$ et $V(X_t)$.

b) On note pour tout réel $t > 0$, $\psi(t) = \Gamma'(t)/\Gamma(t)$, et $\psi'$ la dérivée de $\psi$. Montrer que $E(\ln(X_t)) = \psi(t)$ et $V(\ln(X_t)) = \psi'(t)$.

3. a) Montrer que pour tout réel $t > 1$, $E(1/X_t)$ existe et calculer sa valeur.

b) Établir pour tout réel $x > 0$, l'encadrement : $1 - \dfrac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1$.

En déduire que l'on a : $(\ln x)^2 \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^2 + (x-1)^2$.

c) À l'aide des questions précédentes, établir les inégalités suivantes : pour tout réel $t > 0$, $E\left(\ln\left(\dfrac{X_t}{t}\right)\right) \leqslant 0$ ; pour tout réel $t > 1$, $E\left(\ln\left(\dfrac{X_t}{t}\right)\right) \geqslant -\dfrac{1}{t-1}$ ; pour tout réel $t > 2$, $E\left(\ln^2\left(\dfrac{X_t}{t}\right)\right) \leqslant \dfrac{2t}{(t-2)^2}$.

d) Soit $t$ un réel fixé strictement positif. Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\ln\left(\dfrac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0.

4. Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}, (B_n)_{n\geqslant 1}$ et $(C_n)_{n\geqslant 1}$ trois suites de variables aléatoires à densité qui convergent en probabilité vers 0. On pose pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ : $D_n = A_n + B_n + C_n$. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle qui converge vers $u$. On considère deux variables aléatoires réelles à densité $M$ et $N$ telles que pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, $M$ est de même loi que $N + D_n + u_n$.

a) Montrer pour tout réel $\varepsilon > 0$, l'inclusion : $[|D_n| > \varepsilon] \subset [|A_n| > \varepsilon/3] \cup [|B_n| > \varepsilon/3] \cup [|C_n| > \varepsilon/3]$.
En déduire que la suite $(D_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0.

b) On pose pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ : $V_n = D_n + u_n - u$. Montrer que la suite de variables aléatoires $(V_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0. En déduire la limite en probabilité de la suite $((N+u) + V_n)_{n\geqslant 1}$.

c) On admet sans démonstration que la convergence en probabilité entraîne la convergence en loi.
Montrer que les variables aléatoires $M$ et $N + u$ sont de même loi.

5. Soit $(\alpha, \beta)$ un couple de réels strictement positifs, et $X_\alpha$ et $X_\beta$ deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\gamma(\alpha)$ et $\gamma(\beta)$. On pose : $T_{\alpha,\beta} = \dfrac{X_\alpha}{X_\beta}$, $Q_{\alpha,\beta} = \ln(T_{\alpha,\beta})$ et $B(\alpha,\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

a) Préciser $Q_{\alpha,\beta}(\Omega)$. Déterminer une densité de $\ln(X_\alpha)$ et de $-\ln(X_\beta)$ respectivement.

b) En déduire qu'une densité $f_{Q_{\alpha,\beta}}$ de $Q_{\alpha,\beta}$ est donnée par : pour tout réel $x$,

$$f_{Q_{\alpha,\beta}}(x) = \frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha+\beta)y} \exp\left(-e^y(1+e^{-x})\right) dy$$

c) À l'aide du changement de variable $u = e^y(1+e^{-x})$, dont on justifiera la validité, établir la formule suivante : pour tout $x$ réel, $f_{Q_{\alpha,\beta}}(x) = \dfrac{1}{B(\alpha,\beta)} \times \dfrac{e^{\alpha x}}{(1+e^x)^{\alpha+\beta}}$.

d) En déduire une densité $f_{T_{\alpha,\beta}}$ de $T_{\alpha,\beta}$.

e) On pose : $J_{\alpha,\beta} = \dfrac{X_\alpha}{X_\alpha + X_\beta}$. Montrer qu'une densité $f_{J_{\alpha,\beta}}$ de $J_{\alpha,\beta}$ est donnée par :

$$f_{J_{\alpha,\beta}}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \notin ]0,1[ \\ \dfrac{1}{B(\alpha,\beta)} z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1} & \text{si } z \in ]0,1[ \end{cases}$$

## Partie II. Étude de la variable aléatoire $\ln(X_t)$

Soit $(Y_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1. On suppose que pour tout réel $\alpha > 0$, $X_\alpha$ est indépendante de chacune des variables aléatoires de la suite $(Y_k)_{k\geqslant 1}$.

On pose : $S_0 = 0$ et pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, $S_k = \sum_{i=1}^{k} Y_i$.

6. Rappeler sans démonstration la loi de $S_k$ ainsi que les valeurs respectives de $E(S_k)$ et $V(S_k)$.

7. a) Justifier pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, l'égalité suivante : $\ln(X_t) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{X_t + S_{k-1}}{X_t + S_k}\right) + \ln(X_t + S_n)$.

b) Montrer que pour tout entier $m$ de $\mathbb{N}^*$, la loi de $X_t + S_m$ est celle de $X_{t+m}$.

**On admet** jusqu'à la fin du problème les résultats suivants :

- soit $n$ un entier de $\mathbb{N}^*$ et $A_1, \dots, A_n$ des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes. Alors, pour tout $p$ de $[\![1, n-1]\!]$, pour toutes fonctions réelles $\varphi_1$ et $\varphi_2$ continues, les variables aléatoires $\varphi_1(A_1, \dots, A_p)$ et $\varphi_2(A_{p+1}, \dots, A_n)$ sont indépendantes ;
- si $A$ et $B$ sont deux variables aléatoires indépendantes admettant une espérance, alors $AB$ admet une espérance et $E(AB) = E(A)E(B)$ ;
- pour tout couple $(\alpha, \beta)$ de réels strictement positifs, si les variables aléatoires $X_\alpha$ et $X_\beta$ sont indépendantes, de lois respectives $\gamma(\alpha)$ et $\gamma(\beta)$, alors les variables aléatoires $\frac{X_\alpha}{X_\alpha + X_\beta}$ et $X_\alpha + X_\beta$ sont indépendantes.

8. On pose pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$ : $R_{t,k} = \frac{X_t + S_{k-1}}{X_t + S_k}$.

a) Montrer que $R_{t,1}$ et $R_{t,2}$ sont indépendantes. On admet dans la suite que les variables aléatoires $R_{t,k} (k \geqslant 1)$ sont indépendantes.

b) En déduire à l'aide des questions précédentes que pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $\ln(X_t)$ et $\sum_{k=1}^{n} \ln(R_{t,k}) + \ln(X_{t+n})$ sont de même loi.

9. a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $-\ln U$.

b) À l'aide de la question 5.e, calculer une densité $f_{R_{t,k}}$ de la variable aléatoire $R_{t,k}$.

c) Soit $(U_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que $U$. Montrer que pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $R_{t,k}$ et $U_k^{\frac{1}{t+k-1}}$ sont de même loi.

d) Déduire des questions précédentes que pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\ln(X_t)$ est de même loi que la variable aléatoire $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{Y_{k+1}}{t+k}\right) + \ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right) + d_{n,t} - \gamma$.

10. En utilisant les résultats des questions 1.c,2.b,3.c et 9.d, montrer que pour tout réel $t > 0$, on a :

$$E(\ln(X_t)) = \psi(t) = -\gamma + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{t+k}\right) \text{ et } V(\ln(X_t)) = \psi'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(t+k)^2}$$

11. En utilisant la question 3.c, calculer $\lim_{t\to+\infty} (\psi(t) - \ln t)$.

12. On pose : $W = U^{1/\mu}$, où $\mu$ désigne un paramètre réel strictement positif inconnu. Afin d'estimer $\mu$, on considère pour $p$ supérieur ou égal à 3, un $p$-échantillon $(W_1, W_2, \dots, W_p)$ i.i.d. de la loi de $W$.

On pose : $G_p = -p\left(\sum_{i=1}^{p} \ln W_i\right)^{-1}$. Justifier que la variable aléatoire $G_p$ est un estimateur du paramètre $\mu$. Est-il sans biais ? Est-il convergent ?

13. On rappelle que l'appel à la fonction Pascal `random` a pour résultat un nombre de type `real` pris au hasard dans l'intervalle $[0, 1[$.

a) Soit `X` la fonction Pascal suivante :

```
function X(lambda : real) : real ;
begin
  X := -ln(1-random)/lambda
end ;
```

Cette fonction simule une variable aléatoire réelle. Donner sa loi. Justifier votre réponse.

b) Écrire une fonction Pascal d'en-tête `g(n : integer) : real` simulant une variable aléatoire de loi $\gamma(n)$.

c) Soit `m` la fonction Pascal suivante :

```
function m(p : integer) : real ;
begin
  m := p/g(p)
end ;
```

On appelle la fonction `m` pour différentes valeurs de $p$ de plus en plus grandes. Que devrait-on constater ?

**Partie III. Quelques propriétés de la fonction $\Gamma$**

*Les notations sont celles des parties I et II.*

14. *Première application : les formules de Wilks et Legendre.*

a) Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ et tout réel $t>0$, établir l'égalité :

$$2\sum_{k=0}^{2n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{a_{k+1}}{t+k}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{a_{2k+1}}{\frac{t}{2}+k}\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{a_{2k+2}}{\frac{t+1}{2}+k}\right)+2\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)$$

b) Exprimer $w_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)$ en fonction de deux termes de la suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=\ln 2$.

c) Pour $t>0$, soit $X_t$ et $X_{t+\frac{1}{2}}$ deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\gamma(t)$ et $\gamma(t+\frac{1}{2})$. En utilisant les questions 4 et 9.d, montrer que la variable aléatoire $2\ln(X_t)$ est de même loi que la variable aléatoire $\ln(X_{\frac{t}{2}})+\ln(X_{\frac{t+1}{2}})+2\ln 2$.

d) On pose : $t=2s$. Déduire de la question précédente que pour tout réel $r>0$, $(X_{2s})^{2r}$ et $2^{2r}(X_s)^r(X_{s+\frac{1}{2}})^r$ sont de même loi.

e) En choisissant une valeur particulière de $s$, établir pour tout $r>0$, la formule :

$$2^{2r-1}\Gamma(r)\Gamma(r+\frac{1}{2})=\Gamma(2r)\sqrt{\pi}$$

15. *Deuxième application : la formule de Stirling.*

a) Déterminer quatre réels $a,b,c,d$ tels que pour tout réel $u>0$, on a : $\dfrac{1}{u^2(u+1)^2}=\dfrac{a}{u^2}+\dfrac{b}{(u+1)^2}+\dfrac{c}{u}+\dfrac{d}{u+1}$.

En déduire pour tout $t>0$, la relation : $\psi'(t)=\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{2t^2}+\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2}$.

On admet sans démonstration que pour tout $u>0$, on a :

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(u+\frac{1}{14})^3}-\frac{1}{(u+\frac{15}{14})^3}\right)\leqslant\frac{1}{u^2(u+1)^2}\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{1}{u^3}-\frac{1}{(u+1)^3}\right)$$

b) Déduire des deux résultats précédents, pour tout $t>0$, les deux encadrements :

$$\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{6(t+\frac{1}{14})^3}\leqslant\psi'(t)-\frac{1}{t}\leqslant\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{6t^3}\text{ et }\ln t-\frac{1}{2t}-\frac{1}{12t^2}\leqslant\psi(t)\leqslant\ln t-\frac{1}{2t}-\frac{1}{12(t+\frac{1}{14})^2}$$

En déduire un équivalent de $E(\ln(X_t))$ et de $V(\ln(X_t))$ respectivement, lorsque $t$ tend vers $+\infty$.

c) Calculer pour tout $y$ vérifiant $y>t>0$, l'intégrale : $\displaystyle\int_t^y\left(\psi(x)-\ln(x)+\frac{1}{2x}\right)dx$.

Montrer pour $t$ fixé, l'existence de $\lim\limits_{y\to+\infty}\ln\left(\dfrac{\Gamma(y)}{y^{y-\frac{1}{2}}e^{-y}}\right)$ ; on note $\theta$ cette limite.

d) En utilisant la question 14.e et l'identité : $x^x=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^x\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{-x}$, valable pour $x>0$, calculer $e^\theta$.

En déduire que $\Gamma(x)$ est équivalent à $\sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}$, lorsque $x$ tend vers $+\infty$.