

ESCP-EAP

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES III

Jeudi 15 mai 2003, de 8h à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE

Soit a, b deux entiers naturels non nuls et s leur somme.

Une urne contient initialement a boules noires et b boules blanches indiscernables au toucher.

On effectue dans cette urne une suite infinie de tirages au hasard d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne ;
- si la boule tirée est noire, elle est remplacée dans l'urne par une boule blanche prise dans une réserve annexe.

Avant chaque tirage, l'urne contient donc toujours s boules.

On désigne par $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé qui modélise cette expérience et, pour tout entier naturel n non nul, on note :

- B_n l'événement « la n -ième boule tirée est blanche » ;
- X_n la variable aléatoire désignant le nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages ;
- u_n l'espérance de la variable aléatoire X_n , c'est-à-dire $u_n = \mathbf{E}(X_n)$.

1. Étude d'un ensemble de suites

Soit A l'ensemble des suites $(x_n)_{n \geq 1}$ de réels qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s x_{n+1} = (s-1)x_n + b + n$$

- a) Soit α et β deux réels et $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \alpha n + \beta$.
Déterminer en fonction de b et de s les valeurs de α et β pour que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ appartienne à A .
- b) Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite appartenant à A , $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite déterminée à la question précédente et $(y_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad y_n = x_n - v_n$.
Montrer que la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique et expliciter, pour tout entier naturel n non nul, y_n puis x_n en fonction de x_1, b, s et n .

2. Expression de la probabilité $\mathbf{P}(B_{n+1})$ à l'aide de u_n

- a) Donner, en fonction de b et de s , les valeurs respectives de la probabilité $\mathbf{P}(B_1)$ et du nombre u_1 .
- b) Calculer la probabilité $\mathbf{P}(B_2)$ et vérifier l'égalité : $\mathbf{P}(B_2) = \frac{b+1-u_1}{s}$.
- c) Soit n un entier naturel vérifiant $1 \leq n \leq a$. Montrer que, pour tout entier k de l'intervalle $\llbracket 0, n \rrbracket$, la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}(B_{n+1}/[X_n = k])$ est égale à $\frac{b+n-k}{s}$.

En déduire l'égalité : $\mathbf{P}(B_{n+1}) = \frac{b+n-u_n}{s}$.

- d) Soit n un entier naturel vérifiant $n > a$.

Si k est un entier de l'intervalle $\llbracket 0, n-a-1 \rrbracket$, quel est l'événement $[X_n = k]$?

Si k est un entier de l'intervalle $\llbracket n-a, n \rrbracket$, justifier l'égalité : $\mathbf{P}(B_{n+1}/[X_n = k]) = \frac{b+n-k}{s}$.

Montrer enfin que l'égalité $\mathbf{P}(B_{n+1}) = \frac{b+n-u_n}{s}$ est encore vérifiée.

3. Calcul des nombres u_n et $\mathbf{P}(B_n)$

- a) Soit n un entier naturel non nul. Établir, pour tout entier k de l'intervalle $\llbracket n+1-a, n \rrbracket$, l'égalité :

$$\mathbf{P}([X_{n+1} = k]) = \frac{a-n+k}{s} \mathbf{P}([X_n = k]) + \frac{b+n-k+1}{s} \mathbf{P}([X_n = k-1])$$

Vérifier cette égalité pour $k = n+1$, $k = n-a$ et pour tout entier k de l'intervalle $\llbracket 1, n-a-1 \rrbracket$.

- b) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, u_{n+1} en fonction de u_n et de n . En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ appartient à l'ensemble A étudié dans la question 1.
- c) Donner, pour tout entier naturel n non nul, les valeurs de u_n et de $\mathbf{P}(B_{n+1})$ en fonction de b , s et n .
- d) Quelles sont les limites des suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(\mathbf{P}(B_n))_{n \geq 1}$?

PROBLÈME

Dans tout le problème, on désigne par \mathcal{C} l'espace vectoriel des applications continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . À toute application f de \mathcal{C} , on associe l'application $D(f)$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D(f)(x) = f(x+1) - f(x)$$

Les parties A , B et C sont indépendantes.

Question préliminaire : D est-il un endomorphisme de \mathcal{C} ?

Partie A : Image par D d'une fonction de répartition

1. Soit F une application de \mathcal{C} . Rappeler les propriétés que doit posséder F pour être considérée comme une fonction de répartition.
2. Soit F une application de \mathcal{C} qui est une fonction de répartition et g l'application $D(F)$.
- a) Montrer que g est positive.

- b) Prouver, pour tout réel x , la double inégalité : $F(x) \leq \int_x^{x+1} F(t) dt \leq F(x+1)$.

En déduire que les limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^{x+1} F(t) dt$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} F(t) dt$ existent et préciser leurs valeurs.

- c) Soit A et B deux réels vérifiant $A < 0 < B$ et $I(A, B)$ l'intégrale : $I(A, B) = \int_A^B g(t) dt$.

Justifier l'égalité : $I(A, B) = \int_B^{B+1} F(t) dt - \int_A^{A+1} F(t) dt$.

- d) Prouver alors soigneusement que g est une densité de probabilité.

3. Un exemple

On suppose, dans cette question, que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ et on pose : $g = D(F)$.

Déterminer $g(x)$ pour tout réel x , en distinguant les cas $x < -1$, $-1 \leq x < 0$, $0 \leq x < 1$ et $1 \leq x$. Représenter graphiquement l'application g .

Partie B : Recherche des valeurs propres de D

Si λ est un réel, on dit que λ est une *valeur propre* de D s'il existe une application f de \mathcal{C} , distincte de l'application nulle, vérifiant : $D(f) = \lambda f$.

1. Soit a un réel. On note g_a l'application de \mathcal{C} définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, g_a(x) = e^{ax}$. Déterminer l'application $D(g_a)$.
2. En déduire que tout réel λ strictement supérieur à -1 est une valeur propre de D .
3. Soit a un réel. On note h_a l'application de \mathcal{C} définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, h_a(x) = \sin(\pi x) e^{ax}$. Déterminer l'application $D(h_a)$.
4. En déduire que tout réel λ strictement inférieur à -1 est une valeur propre de D .
5. Le réel -1 est-il une valeur propre de D ?

Partie C : Image par D d'une application polynomiale

Pour tout entier naturel p , on désigne par E_p le sous-espace de \mathcal{C} dont les éléments sont les applications polynomiales de degré au plus p .

On note X l'application $x \mapsto x$ et, pour tout entier naturel non nul k , on note X^k l'application $x \mapsto x^k$.

Soit $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la suite d'applications polynomiales définie par :

$$H_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad H_i = \frac{1}{i!} \prod_{k=0}^{i-1} (X - k)$$

1. Préciser H_1, H_2, H_3 et montrer que $\mathcal{U}_3 = (H_0, H_1, H_2, H_3)$ est une base de E_3 .
2. Soit $\mathcal{B}_3 = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E_3 .
 - a) Écrire la matrice de passage P de la base \mathcal{B}_3 à la base \mathcal{U}_3 et calculer la matrice P^{-1} .
 - b) Soit a_0, a_1, a_2, a_3 des réels et Q l'application polynomiale $a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$. Quelles sont les coordonnées de Q dans la base \mathcal{U}_3 ? En particulier, vérifier l'égalité : $X^3 = H_1 + 6H_2 + 6H_3$.

3. Application : moment d'ordre 3 d'une variable aléatoire de Poisson

Soit a un réel strictement positif et Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a .

- a) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{k^3 a^k}{k!}$. Transformer S_n à l'aide de la relation : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad k^3 = H_1(k) + 6H_2(k) + 6H_3(k)$. En déduire que la série de terme général $\frac{n^3 a^n}{n!}$ est convergente et préciser $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 a^n}{n!}$.
- b) En déduire que la variable aléatoire Z admet un moment d'ordre 3 donné par :

$$\mathbf{E}(Z^3) = a + 3a^2 + a^3$$

4. Dans cette question, p est un entier naturel non nul fixé.

- a) Montrer que, si Q appartient à E_p , $D(Q)$ appartient aussi à E_p . On note alors D_p l'endomorphisme de E_p qui, à tout Q de E_p , associe $D(Q)$.
- b) Montrer que la famille $\mathcal{U}_p = (H_0, H_1, \dots, H_p)$ est une base de E_p .
- c) Déterminer $D_p(H_0), D_p(H_1)$ et prouver, pour tout entier i vérifiant $0 < i \leq p$, l'égalité : $D_p(H_i) = H_{i-1}$.

d) Écrire la matrice M_p représentative de D_p dans la base \mathcal{U}_p .

e) Préciser la ou les valeurs propres de M_p . Cette matrice est-elle diagonalisable ?

5. Application : moment d'ordre p d'une variable aléatoire de Poisson

Soit p un entier naturel non nul fixé et b_0, b_1, \dots, b_p les réels vérifiant

$$X^p = b_0 H_0 + b_1 H_1 + \dots + b_p H_p$$

Par une méthode analogue à celle de la question **3.**, montrer que la variable aléatoire Z définie dans la question **3.** admet un moment d'ordre p donné par $\mathbf{E}(Z^p) = \sum_{i=0}^p \frac{b_i a^i}{i!}$.

6. Dans cette question, p est un entier naturel non nul et, pour tout entier i vérifiant $0 \leq i \leq p$, on considère l'application φ_i de E_p dans \mathbb{R} qui, à tout élément Q de E_p , associe le réel :

$$\varphi_i(Q) = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} C_i^k Q(k)$$

où C_i^k désigne le coefficient binomial d'indices i et k .

a) Montrer que, pour tout entier i vérifiant $0 \leq i \leq p$, l'application φ_i est linéaire.

b) Soit i et j deux entiers vérifiant $0 \leq i \leq p$ et $0 \leq j \leq p$; établir les égalités :

$$\varphi_i(H_i) = 1 \quad \text{et si } j \neq i, \quad \varphi_i(H_j) = 0$$

c) En déduire, pour tout entier i vérifiant $0 \leq i \leq p$, la relation : $b_i = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} C_i^k k^p$.