CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
Direction de l'Enseignement

**BANQUE COMMUNE D'EPREUVES ECRITES
POUR LE HAUT ENSEIGNEMENT COMMERCIAL**

Concepteur : E.S.C.P. – E.A.P.

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Vendredi 7 Mai 2004, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE

On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^6$ et par $\mathcal{B}$ sa base canonique : $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$.
On pose $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{B}_2 = (e_4, e_5, e_6)$, et on désigne respectivement par E_1 et E_2 les sous-espaces vectoriels de E engendrés par $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.
Enfin, A est la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Soit u l'endomorphisme de E_1 dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_1$ est A.
Déterminer les valeurs propres de u ainsi qu'une base de vecteurs propres.

2. Soit f l'application linéaire de E_1 vers E_2 définie par : $f(e_1) = e_4$, $f(e_2) = e_5$ et $f(e_3) = e_6$.
Montrer que f est un isomorphisme et déterminer la matrice de son isomorphisme réciproque f^{-1} relativement aux bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_1$.

3. a) Montrer que, si (x_1, x_2) est un élément de $E_1 \times E_2$ vérifiant l'égalité $x_1 + x_2 = 0$, les vecteurs x_1 et x_2 sont nuls.

b) En déduire que, si (x_1, x_2) et (y_1, y_2) sont deux éléments de $E_1 \times E_2$ vérifiant l'égalité $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, alors on a : $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$.

4. Pour tout vecteur x de E dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$, on pose :

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 \\ x_2 = \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 + \lambda_6 e_6 \end{cases} \quad \text{et} \quad F(x) = u(x_1) + f(x_1) + f^{-1}(x_2)$$

a) Prouver que l'application F qui à tout vecteur x de E associe le vecteur $F(x)$, est un endomorphisme de E.

b) Déterminer le noyau de F et en déduire que F est un automorphisme.

c) Montrer que la matrice M de F dans la base $\mathcal{B}$ peut s'écrire sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. On suppose, dans cette question, que μ est une valeur propre de F et que x est un vecteur propre associé à μ ; on définit les vecteurs x_1 de E_1 et x_2 de E_2 comme dans la question précédente.

a) Justifier que la valeur propre μ n'est pas nulle.

b) Utiliser les résultats de la question **3.** pour prouver que les vecteurs x_1 et x_2 sont tous les deux non nuls et que x_1 est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $\mu - \dfrac{1}{\mu}$ ·

6. Étudier la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\varphi(x) = x - \dfrac{1}{x}$ et en donner une représentation graphique.

7. On suppose, dans cette question, que λ est une valeur propre de u et que x_1 est un vecteur propre de u associé à λ.

a) Montrer que l'équation d'inconnue μ suivante : $\lambda = \mu - \dfrac{1}{\mu}$ admet deux solutions distinctes μ_1 et μ_2.

b) Montrer que μ_1 et μ_2 sont des valeurs propres de F. Donner, en fonction de x_1, un vecteur propre de F associé à μ_1 et un vecteur propre de F associé à μ_2.

8. La matrice M est-elle diagonalisable ?

PROBLÈME

Dans tout le problème, r désigne un entier naturel vérifiant $1 \leqslant r \leqslant 10$.

Une urne contient 10 boules distinctes $B_1, B_2, \ldots, B_{10}$. Une expérience aléatoire consiste à y effectuer une suite de tirages d'une boule **avec remise** , chaque boule ayant la même probabilité de sortir à chaque tirage. Cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Partie I : Étude du nombre de tirages nécessaires pour obtenir au moins une fois chacune des boules $B_1, \ldots, B_r$

On suppose que le nombre de tirages nécessaires pour obtenir au moins une fois chacune des boules $B_1, \ldots, B_r$ définit une variable aléatoire Y_r sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

1. Cas particulier $r = 1$. Montrer que la variable aléatoire Y_1 suit une loi géométrique ; préciser son paramètre, son espérance et sa variance.

2. On suppose que r est supérieur ou égal à 2.

a) Calculer la probabilité pour que les r boules $B_1, B_2, \ldots, B_r$ sortent dans cet ordre aux r premiers tirages.

b) En déduire la probabilité $\mathbf{P}([Y_r = r])$.

c) Préciser l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire Y_r.

3. On se propose de calculer la probabilité $\mathbf{P}([Y_r = r + 1])$.

a) Soit E l'événement : « au cours des r premiers tirages, est sortie exactement une boule de numéro strictement supérieur à r ».
Calculer la probabilité de l'événement $E \cap [Y_r = r + 1]$.

b) On définit les événements suivants :
F est l'événement « au cours des r premiers tirages, ne sont sorties que les boules $B_1, B_2, \ldots, B_r$, chacune d'elles au moins une fois » ;
F_1 est l'événement « B_1 est sortie deux fois au cours des r premiers tirages et B_r est sortie au $r+1$-ième tirage ».
Exprimer la probabilité $\mathbf{P}(F \cap [Y_r = r+1])$ en fonction de la probabilité $\mathbf{P}(F_1 \cap [Y_r = r+1])$, puis calculer $\mathbf{P}([F_1 \cap [Y_r = r+1])$.
En déduire l'égalité : $\mathbf{P}(F \cap [Y_r = r+1]) = \dfrac{r(10-r)\,r!}{10^{r+1}}$.

c) Prouver l'égalité : $\mathbf{P}([Y_r = r+1]) = \dfrac{r.r!\,(19-r)}{2.10^{r+1}}$.

4. On suppose encore que r est supérieur ou égal à 2. Pour tout entier i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant r$, on désigne par W_i la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, i boules distinctes parmi les boules $B_1, B_2, \ldots, B_r$ soient sorties (en particulier, on a : $W_r = Y_r$).
On pose : $X_1 = W_1$ et, pour tout i vérifiant $2 \leqslant i \leqslant r$, $X_i = W_i - W_{i-1}$.
On admet que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_r$ sont indépendantes.

a) Exprimer la variable aléatoire Y_r à l'aide des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_r$.

b) Interpréter concrètement la variable aléatoire X_i pour tout i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant r$.

c) Montrer que, pour tout i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant r$, la variable aléatoire X_i suit une loi géométrique ; préciser son espérance et sa variance.

d) On pose : $S_1(r) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k}$ et $S_2(r) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^2}$ ·
Exprimer l'espérance $\mathbf{E}(Y_r)$ et la variance $\mathbf{V}(Y_r)$ de Y_r à l'aide de $S_1(r)$ et de $S_2(r)$.

5. a) Si k est un entier naturel non nul, préciser le minimum et le maximum de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur l'intervalle $[k, k+1]$ et en déduire un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

b) Si r est supérieur ou égal à 2, donner un encadrement de $S_1(r)$ et en déduire la double inégalité :
$$10\ln(r+1) \leqslant \mathbf{E}(Y_r) \leqslant 10(\ln r + 1)$$

c) Si r supérieur ou égal à 2, établir par une méthode analogue à celle de la question précédente, la double inégalité : $1 - \dfrac{1}{r+1} \leqslant S_2(r) \leqslant 2 - \dfrac{1}{r}$ ·
En déduire un encadrement de $\mathbf{V}(Y_r)$.

Partie II : Étude du nombre de boules distinctes parmi les boules $B_1, B_2, \ldots, B_r$ tirées au moins une fois au cours des n premiers tirages

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on suppose que le nombre de boules distinctes parmi les boules $B_1, B_2, \ldots, B_r$ tirées au moins une fois au cours des n premiers tirages, définit une variable aléatoire Z_n sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$; on note $\mathbf{E}(Z_n)$ l'espérance de Z_n et on pose $Z_0 = 0$.

Pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier naturel k, on note $p_{n,k}$ la probabilité de l'événement $[Z_n = k]$ et on pose : $p_{n,-1} = 0$.

1. Étude des cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$.

a) Déterminer la loi de Z_1 et donner son espérance.

b) On suppose, dans cette question, que r est supérieur ou égal à 2. Déterminer la loi de Z_2 et montrer que son espérance est donnée par : $\mathbf{E}(Z_2) = \dfrac{19\,r}{100}$ ·

2. Établir, pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier naturel k au plus égal à r, l'égalité :
$$\textbf{(1)} \qquad 10\,p_{n,k} = (10 - r + k)p_{n-1,k} + (r + 1 - k)p_{n-1,k-1}$$
Vérifier que cette égalité reste vraie dans le cas où k est supérieur ou égal à $r+1$.

3. Pour tout entier naturel non nul n, on définit le polynôme Q_n par : pour tout réel x,
$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k} x^k$, et on pose $Q_0(x) = 1$.

a) Préciser les polynômes Q_1 et Q_2.

b) Calculer $Q_n(1)$ et exprimer $Q'_n(1)$ en fonction de $\mathbf{E}(Z_n)$ (Q'_n désignant la dérivée du polynôme Q_n).

c) En utilisant l'égalité **(1)**, établir, pour tout réel x et pour tout entier naturel n non nul, la relation suivante :

$$\textbf{(2)} \qquad 10\, Q_n(x) = (10 - r + rx)\, Q_{n-1}(x) + x(1-x)\, Q'_{n-1}(x)$$

d) En dérivant membre à membre l'égalité **(2)**, former, pour tout entier naturel n non nul, une relation entre les espérances $\mathbf{E}(Z_n)$ et $\mathbf{E}(Z_{n-1})$.
En déduire, pour tout entier naturel n, la valeur de $\mathbf{E}(Z_n)$ en fonction de n et de r.

4. a) Pour tout entier naturel n, le polynôme Q''_n désigne la dérivée du polynôme Q'_n.
En utilisant une méthode semblable à celle de la question précédente, trouver pour tout entier naturel n non nul, une relation entre $Q''_n(1)$ et $Q''_{n-1}(1)$.
En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante :

$$Q''_n(1) = r(r-1)\left[1 + \left(\frac{8}{10}\right)^n - 2\left(\frac{9}{10}\right)^n\right]$$

b) Calculer, pour tout entier naturel n, la variance de la variable aléatoire Z_n en fonction de n et de r.