Partie II : Polynômes de Laguerre

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les applications

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x^n \, \mathrm{e}^{-x}}{n!} ,$$

$$L_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \mathrm{e}^x f_n^{(n)}(x),$$

où $f_n^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f_n.

6. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$.

7. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k.$$

8. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est une fonction polynomiale dont on précisera le degré et le coefficient du terme de plus haut degré.

9. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'_{n+1}(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x).$$

10. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x).$$

11. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1} f_n(x).$$

12. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad (n+1)L_{n+1}(x) = xL'_n(x) + (n+1-x)L_n(x).$$

13. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad xL''_n(x) - (x-1)L'_n(x) + nL_n(x) = 0.$$

Partie III : Produit scalaire, orthogonalité, endomorphisme

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $N \in \mathbb{N}$ fixé. On note E_N le sous-espace vectoriel de E formé des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à N.

14. Montrer que, pour tout $A \in E$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} A(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge.

On considère l'application

$$< . , . >: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (P, Q) \longmapsto \; < P , Q > = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

15. Montrer que $< . , . >$ est un produit scalaire sur E.

On considère, pour tout $P \in E$, l'application $T(P) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(P)(x) = xP''(x) - (x-1)P'(x).$$

16. Vérifier que T est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

17. Montrer que, pour tout $P \in E$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \longmapsto T(P)(x)\,\mathrm{e}^{-x}$ est la dérivée de l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \longmapsto xP'(x)\,\mathrm{e}^{-x}$.

18. En déduire, pour tout $(P, Q) \in E \times E$:

$$< T(P) , Q > = -\int_0^{+\infty} xP'(x)Q'(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

19. Établir : $\forall (P, Q) \in E \times E, \quad < T(P) , Q > = < P , T(Q) >$.

20. En utilisant le résultat de la question **13**, calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T(L_n)$.

21. En déduire que la famille $(L_0, ..., L_N)$ est orthogonale.

22. Montrer :

$$\forall P \in E_N, \quad T(P) \in E_N.$$

On note T_N l'endomorphisme induit par T sur E_N, c'est-à-dire l'endomorphisme T_N de E_N défini par :

$$\forall P \in E_N, \quad T_N(P) = T(P).$$

23. Montrer que $(L_0, ..., L_N)$ est une base de E_N.

24. Donner la matrice de T_N dans la base $(L_0, ..., L_N)$ de E_N.

25. Est-ce que T_N est diagonalisable ? Est-ce que T_N est bijectif ?

Partie IV : Nature d'une série de maximums

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application

$$g_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x^n\,\mathrm{e}^{-x}}{n!}.$$

26. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n admet un maximum, noté M_n, et calculer M_n.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mu_n = \sqrt{n}\,M_n$ et $a_n = \ln \mu_{n+1} - \ln \mu_n$.

27. Former le développement limité de a_n à l'ordre 2 lorsque l'entier n tend vers l'infini.

28. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$.

29. Établir que la suite $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ converge et que sa limite est strictement positive.

30. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} M_n$?

Partie V : Étude d'extremum local pour une fonction de deux variables réelles

On considère les applications

$$f :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{-x}\ ,$$
$$F :]0\,;+\infty[^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto f(x) + f(y) - f(x+y).$$

31. Montrer que F est de classe C^2 sur l'ouvert $]0\,;+\infty[^2$ et exprimer, pour tout $(x,y) \in]0\,;+\infty[^2$, les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ en fonction de $f\,'(x)$, $f\,'(y)$ et $f\,'(x+y)$.

32. Établir que, pour tout $a \in]0\,;+\infty[$, l'équation $f\,'(x) = f\,'(a)$, d'inconnue $x \in]0\,;+\infty[$, admet au plus une solution distincte de a.

33. En déduire que, pour tout $(x,y) \in]0\,;+\infty[^2$, (x,y) est un point critique de F si et seulement si :

$$x = y \qquad \text{et} \qquad f\,'(x) = f\,'(2x).$$

34. Montrer que F admet un point critique et un seul, noté (α, α), et montrer que $1 < \alpha < 2$.

35. Montrer : $f\,''(\alpha) < 0$ et $f\,''(2\alpha) > 0$.

36. Montrer que F admet un extremum local, et un seul. Déterminer la nature de cet extremum.

★ ★ ★