b. En déduire : $\displaystyle\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y \underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \ln\frac{b}{a}\cdot$

c. Établir, pour tout X de $]0\,;+\infty[$: $\displaystyle\int_0^X \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{b}{a} - \int_{aX}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y.$

d. En déduire : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{b}{a}\cdot$

Partie II - Étude d'un produit scalaire

On note E l'ensemble des applications $f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, bornées, de classe C^1, telles que $f(0) = 0$.

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel des applications de $[0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

2. On considère les applications f_1, f_2, f_3, f_4 définies, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, par :

$$f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = \cos x, \quad f_3(x) = \mathrm{e}^x - 1, \quad f_4(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

Pour chacune de ces applications, indiquer, en le justifiant, si elle est ou non un élément de E.

3. **a.** Montrer, pour tout $f \in E$: $\displaystyle\frac{f(x)}{x} \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} f'(0).$

b. Montrer que, pour tout $(f, g) \in E^2$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

On note $(.\,|\,.) : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (f, g) \longmapsto (f\,|\,g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

4. Établir que $(.\,|\,.)$ est un produit scalaire sur E.

5. Démontrer, pour tout $(f, g) \in E^2$: $\displaystyle (f\,|\,g) = \int_0^{+\infty} \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$

(À cet effet, on pourra commencer par effectuer une intégration par parties sur un segment.)

6. On note, pour tout $\alpha \in]0\,;+\infty[$, $u_\alpha : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, par :

$$u_\alpha(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha x}.$$

a. Vérifier : $\forall \alpha \in]0\,;+\infty[, \quad u_\alpha \in E.$

b. Calculer, pour tout $(\alpha, \beta) \in]0\,;+\infty[^2$, le produit scalaire $(u_\alpha\,|\,u_\beta)$.

(À cet effet, on pourra utiliser les résultats de **II.5** et **I.3.d**.)

c. Établir, pour tout $(\alpha, \beta) \in]0\,;+\infty[^2$: $(u_\alpha\,|\,u_\beta) > 0$.

Partie III - Étude de densités de variables aléatoires

On note c un réel strictement positif.

On considère l'application $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel x, par :

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^{-c^2 x} - \mathrm{e}^{-4c^2 x}}{x \ln 4} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Montrer que v est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Soit X une variable aléatoire réelle, à valeurs positives ou nulles, admettant v comme densité.

2. Montrer que X admet une espérance et calculer $\mathrm{E}(X)$ en fonction de c.

3. On note Y la variable aléatoire réelle définie par : $Y = \sqrt{X}$.

a. Montrer que Y est une variable aléatoire réelle à densité et calculer une densité de Y.

b. Montrer que la variable aléatoire réelle Y admet une espérance et une variance, et déterminer $\mathrm{E}(Y)$ et $\mathrm{V}(Y)$ en fonction de c.

PROBLÈME 2

Notations et définitions

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

- La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I_n et la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée 0_n.
- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est nilpotente s'il existe un entier naturel non nul p tel que $M^p = 0_n$.
- Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre réelle de M. On note $\mathrm{SEP}(M, \lambda)$ le sous-espace propre de M associé à λ.
- On dit qu'une matrice S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive lorsqu'elle est symétrique et vérifie :
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\quad {}^tXSX \geqslant 0.$$
- Soient $A, R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que R est une racine carrée de A lorsqu'elle vérifie $R^2 = A$.

Le but de ce problème est d'étudier la notion de racine carrée d'une matrice dans quelques cas particuliers.

Partie I - Deux exemples

1. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

Calculer $(R_\theta)^2$ et en déduire que la matrice I_2 admet une infinité de racines carrées.

2. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de racine carrée.

Partie II - Racines carrées d'une matrice de la forme $\mathrm{I}_n + N$ avec N nilpotente

1. Donner le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de $t \longmapsto \sqrt{1+t}$.

On note $\sqrt{1+t} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \underset{t \to 0}{o}\left(t^3\right)$ ce développement limité.

2. Montrer qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que :

$$1 + \mathrm{X} = (a_0 + a_1\mathrm{X} + a_2\mathrm{X}^2 + a_3\mathrm{X}^3)^2 + \mathrm{X}^4 Q(\mathrm{X}).$$

3. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $N^4 = 0_n$. Déduire de la question précédente une racine carrée de $\mathrm{I}_n + N$.

Partie III - Racines carrées d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres strictement positives et deux à deux distinctes

1. Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f \circ g = g \circ f$. On suppose de plus que f admet n valeurs propres réelles deux à deux distinctes.

a. Montrer que chaque sous-espace propre de f est stable par g.

b. En déduire que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g.

c. Justifier que f est diagonalisable.
Montrer que, pour toute base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de f, la matrice associée à g relativement à la base $\mathcal{B}$ est diagonale. En déduire que g est diagonalisable.

2. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles strictement positives et deux à deux distinctes.

a. Justifier l'existence d'une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

b. Donner un exemple de racine carrée de A. (On l'exprimera à l'aide de P et des éléments diagonaux de D.)

c. Soit R une racine carrée de A. Vérifier que $AR = RA$.
En déduire que la matrice $P^{-1}RP$ est diagonale.

d. Établir que A admet exactement 2^n racines carrées.

Partie IV - Racine carrée symétrique positive d'une matrice symétrique positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit S une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique positive.

1. Montrer que toutes les valeurs propres de S sont positives ou nulles.

2. Justifier l'existence d'une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $D = P^{-1}SP$ soit diagonale.

3. Déterminer une racine carrée de S qui soit symétrique positive. (On l'exprimera à l'aide de P et des éléments diagonaux de D.)

4. On veut montrer que S admet une unique racine carrée symétrique positive.
Soit R une matrice symétrique positive telle $R^2 = S$.

a. Soit λ une valeur propre de R. Montrer que λ^2 est valeur propre de S et que les sous-espaces propres associés vérifient : $\mathrm{SEP}(R, \lambda) \subset \mathrm{SEP}(S, \lambda^2)$.

On note p le nombre de valeurs propres deux à deux distinctes de R et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les p valeurs propres deux à deux distinctes de R.

b. Justifier : $$\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{SEP}(R, \lambda_i) \subset \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{SEP}(S, \lambda_i^2).$$

c. En déduire : $$n = \sum_{i=1}^{p} \dim\left(\mathrm{SEP}(R, \lambda_i)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim\left(\mathrm{SEP}(S, \lambda_i^2)\right) \leqslant n.$$

d. Montrer que $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_p^2$ sont les seules valeurs propres de S et que
$$\forall i \in \{1, \ldots, p\}, \quad \mathrm{SEP}(R, \lambda_i) = \mathrm{SEP}(S, \lambda_i^2).$$

e. Montrer que la matrice $P^{-1}RP$ est diagonale.

f. En déduire que S admet une unique racine carrée symétrique positive.