

I Recherche d'extrémums locaux pour une fonction de deux variables réelles

On note $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} dt.$$

1. Montrer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $F(x, y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2y^2$.
2. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout point (x, y) de \mathbb{R}^2 , et en déduire les trois points critiques de F .
3. Déterminer les extrémums locaux de F . En chacun de ceux-ci, préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local, et préciser la valeur de F en chacun de ces points.

II Calcul d'intégrales dépendant d'un paramètre

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les intégrales $\int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} t \cos(xt) e^{-t^2} dt$ convergent.

On note $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad C(x) = \int_0^{+\infty} t \cos(xt) e^{-t^2} dt.$$

2. Établir, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $|\sin(a + \lambda) - \sin a - \lambda \cos a| \leq \frac{\lambda^2}{2}$.

On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

- 3.a. Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

b. En déduire que S est dérivable sur \mathbb{R} et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S'(x) = C(x)$.

- 4.a. À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}S(x)$.

b. Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $2e^{\frac{x^2}{4}} S(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$.

c. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $S(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$ et $C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$.

III Obtention d'un développement limité

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2} e^{-t^2} dt$ converge.

On note $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2} e^{-t^2} dt$.

- 2.a. Montrer, pour tout $u \in [0; +\infty[$: $0 \leq (1-u+u^2) - \frac{1}{1+u} \leq u^3$.

b. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1-x^2t^2+x^4t^4) e^{-t^2} dt - g(x) \leq \frac{15\sqrt{\pi}}{8} x^6$.

3. Montrer que g admet un développement limité à l'ordre 5 en 0, et former ce développement limité.

IV Nature d'une série

1. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt$ converge.

On note, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $u_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt$.

2. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_p \leq \frac{I_{2p}}{(2p)!}$.

En déduire que la série de terme général u_p est convergente.

PROBLÈME II

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On considère un n -uplet $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ de \mathbb{C}^n et le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$.

On note C la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & (0) & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

On dit que C est la matrice compagnon du polynôme P .

On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbb{C}^n .

On note id l'application identité de \mathbb{C}^n et on appelle f l'endomorphisme de \mathbb{C}^n tel que C soit la matrice associée à f relativement à la base \mathcal{B}_0 .

On note $f^0 = \text{id}$ et, pour tout entier naturel k , $f^{k+1} = f^k \circ f$.

1.a. Exprimer, pour tout $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $f(e_i)$ en fonction de e_{i+1} .

b. En déduire : $\forall j \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $f^j(e_1) = e_{j+1}$ et $f^n(e_1) = -(a_0e_1 + a_1e_2 + \dots + a_{n-1}e_n)$.

2. Soit g l'endomorphisme de \mathbb{C}^n défini par $g = f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_1f + a_0\text{id}$.

a. Vérifier : $g(e_1) = 0$.

b. Montrer : $\forall i \in \mathbb{N}$, $g \circ f^i = f^i \circ g$.

c. En déduire : $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $g(e_i) = 0$.

d. Montrer que le polynôme P est annulateur de l'endomorphisme f .

Application 1 : Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ telle que $A^5 = A^3 + 2A^2 + I_5$.

e. Établir que toutes les valeurs propres de C sont des racines du polynôme P .

- 3.a.** Soit $Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{n-1} X^{n-1}$ un polynôme non nul et de degré inférieur ou égal à $n - 1$. On note $Q(f)$ l'endomorphisme de \mathbb{C}^n défini par $Q(f) = \alpha_0 \text{id} + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$. Calculer $Q(f)(e_1)$.
- b.** En déduire qu'il n'existe pas de polynôme non nul, de degré inférieur ou égal à $n - 1$ et annulateur de f .
- c.** Soit λ une racine du polynôme P . Il existe donc un unique polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X - \lambda)R$. Vérifier que $(f - \lambda \text{id}) \circ R(f) = \tilde{0}$, où $\tilde{0}$ est l'endomorphisme nul de \mathbb{C}^n .
- d.** Conclure que toutes les racines du polynôme P sont des valeurs propres de C .
- 4.a.** Montrer que, pour tout nombre complexe x , la matrice $(C - xI_n)$ est de rang supérieur ou égal à $n - 1$. En déduire que chaque sous-espace propre de C est de dimension 1.
- b.** En déduire que C est diagonalisable si et seulement si P admet n racines deux à deux distinctes.

5.a. Application 2 : Montrer que la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

b. Application 3 : Montrer que la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ n'est pas diagonalisable.

6. On note $B = {}^t C$ la matrice transposée de C .

- a.** Montrer que, pour tout nombre complexe t , la matrice $(B - tI_n)$ est inversible si et seulement si la matrice $(C - tI_n)$ est inversible.
- b.** En déduire que les matrices B et C ont les mêmes valeurs propres.
- c.** Soit λ une valeur propre de B . Déterminer une base du sous-espace propre de B associé à λ .
- d.** On suppose que le polynôme P admet n racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distinctes. Montrer que

B est diagonalisable et en déduire que la matrice $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est inversible.

7. Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E admettant n valeurs propres μ_1, \dots, μ_n deux à deux distinctes.

L'endomorphisme u est donc diagonalisable et on note $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de u respectivement associés à μ_1, \dots, μ_n .

- a.** Soit $a = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$. Montrer que la famille $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ est une base de E .
- b.** Montrer qu'il existe un polynôme $P_1 = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \dots + b_1X + b_0$ tel que la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ soit la matrice compagnon du polynôme P_1 .