BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE EPREUVE :

296
EML_MATE

Concepteur : EM LYON

1ère épreuve (option économique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 9 mai 2005 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On considère les éléments suivants de $M_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

On note E le sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ engendré par I, J et K.
Pour toute matrice M de E, on note $M^0 = I$, et si M est inversible, on note, pour tout entier naturel k, $M^{-k} = (M^{-1})^k$, et on rappelle qu'alors M^k est inversible et que $(M^k)^{-1} = M^{-k}$.

1. Déterminer la dimension de E.

2. Calculer J^2, JK, KJ et K^2.

3. Soit la matrice $L = I + J$.

a. Montrer, pour tout entier naturel n :
$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K.$$

b. Vérifier que L est inversible et montrer, pour tout entier relatif n :
$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K.$$

c. Exprimer, pour tout entier relatif n, L^n à l'aide de I, L , L^2 et n.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et e l'application identique de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même.

4. Montrer que f admet une valeur propre et une seule que l'on déterminera.
Est-ce que f est diagonalisable ?

5.a. Soit $w = (1, 0, 0)$.
Calculer $v = (f - e)(w)$ et $u = (f - e)(v)$.
Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Déterminer la matrice associée à f relativement à la base (u, v, w).

c. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et, pour tout entier relatif n, exprimer f^n à l'aide de e, f, f^2 et n.

EXERCICE 2

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout réel t, par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{(t+1)^2} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

1. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

2. Montrer que f est une densité de probabilité.

3. Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et calculer cette intégrale.
On distinguera les cas $x \leqslant 0$ et $x > 0$.

4. Déterminer un réel positif α tel que $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

5. Soit $x \in [0\,; +\infty[$ fixé.
On considère la fonction φ_x définie sur $[0\,; +\infty[$ par : $\forall u \in [0\,; +\infty[,\ \ \varphi_x(u) = \displaystyle\int_{x-u}^{x+u} f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Calculer $\varphi_x(0)$ et $\displaystyle\lim_{u \to +\infty} \varphi_x(u)$.

b. Montrer : $\forall (u, v) \in \left([0\,; +\infty[\right)^2,\ \ u < v \Longrightarrow \varphi_x(v) - \varphi_x(u) \geqslant \displaystyle\int_{x+u}^{x+v} f(t)\,\mathrm{d}t$.

En déduire que φ_x est strictement croissante sur $[0\,; +\infty[$.

c. On admet que φ_x est continue sur $[0\,;+\infty[$. Montrer que l'équation $\varphi_x(u) = \dfrac{1}{2}$, d'inconnue u, admet une solution et une seule dans $[0\,;+\infty[$.

On note $U\ :\ [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application qui, à tout réel $x \in [0\,;+\infty[$, associe $U(x)$ l'unique solution de l'équation $\varphi_x(u) = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, on a : $\displaystyle\int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

6.a. Vérifier, pour tout $x \in \left[0\,;\dfrac{1}{2}\right[$: $\quad U(x) = 1 - x$.

b. Pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$, montrer : $\varphi_x(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$, puis : $x - U(x) \geqslant 0$, et en déduire : $U(x) = \sqrt{4 + (x+1)^2} - 2$.

7.a. Montrer que l'application U est continue sur $[0\,;+\infty[$.

b. Étudier la dérivabilité de U sur $[0\,;+\infty[$.

c. Montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe représentative de U.

d. Tracer l'allure de la courbe représentative de U.

8. On considère la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = U(a_n). \end{cases}$

a. Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

b. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c. En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et montrer que sa limite est égale à $\dfrac{1}{2}$.

d. Écrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left|a_n - \frac{1}{2}\right| \leqslant 10^{-6}.$$

EXERCICE 3

1. Préliminaire :

Soit $x \in]0\,;1[$. Dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de même probabilité d'échec x, on définit deux suites de variables aléatoires $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$ de la façon suivante :

$\star$ pour tout entier naturel n non nul, S_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le n-ième succès ;

$\star$ T_1 est la variable aléatoire égale à S_1 et pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, T_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves supplémentaires nécessaires pour obtenir le n-ième succès après le $(n-1)$-ième succès.

Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, $T_n = S_n - S_{n-1}$ et pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$.

a. Pour tout entier naturel n non nul, déterminer la loi de T_n et, sans calcul, donner l'espérance et la variance de T_n.

b. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, justifier l'indépendance des variables aléatoires $T_1,\ T_2, \ldots, T_n$.

c. Pour tout entier naturel n non nul, montrer que l'espérance et la variance de S_n sont définies et montrer : $\quad \mathrm{E}(S_n) = \dfrac{n}{1-x} \quad$ et $\quad \mathrm{V}(S_n) = \dfrac{nx}{(1-x)^2}$.

d. Soit n un entier naturel non nul. Déterminer la loi de S_n.

Que peut-on dire, sans calcul, de la valeur de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} P(S_n = k)$?

e. En déduire, pour tout $x \in]0\,;1[$ et pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}.$$

2. Deux joueurs A et B procèdent chacun à une succession de lancers d'une même pièce. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est p (p fixé, $p \in]0;1[$), et la probabilité d'obtenir face est $q = 1-p$.

Le joueur A commence et il s'arrête quand il obtient le premier pile. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur A.

Le joueur B effectue alors autant de lancers que le joueur A et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenu par le joueur B.

a. Rappeler la loi de X et, pour tout $k \geqslant 1$, donner la loi conditionnelle de Y sachant $X = k$.

b. Quelles sont les valeurs prises par Y ?

c. Montrer : $$P(Y=0) = \sum_{k=1}^{+\infty} p\, q^{2k-1} = \frac{q}{1+q}.$$

d. Soit n un entier naturel non nul.

Montrer : $$P(Y=n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} q^{2k-n-1},$$

puis, en utilisant **1.e**,

$$P(Y=n) = \frac{1}{(1+q)^2} \left(\frac{q}{1+q}\right)^{n-1}.$$