



**BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES**

CODE ÉPREUVE :

296

EML\_MATE

---

**Concepteur : EM LYON**

---

1<sup>ère</sup> épreuve (option économique)

**MATHÉMATIQUES**

Mardi 2 mai 2006 de 8 heures à 12 heures

*Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.  
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

---

TOURNEZ S.V.P.

## EXERCICE 1

On considère les trois matrices de  $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$  suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.a. Quelles sont les valeurs propres de  $A$  ?

b. Déterminer une matrice inversible  $P$  telle que :  $A = PDP^{-1}$ .

On note  $E$  l'ensemble des matrices carrées  $M$  d'ordre deux telles que :  $AM = MD$ .

2.a. Vérifier que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ .

b. Soit  $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$  une matrice de  $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ .

Montrer que  $M$  appartient à  $E$  si et seulement si :  $z = 0$  et  $y = t$ .

c. Établir que  $(U, A)$  est une base de  $E$ .

d. Calculer le produit  $UA$ . Est-ce que  $UA$  est élément de  $E$  ?

3. On note  $f : \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$  l'application définie, pour toute  $M \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ , par :

$$f(M) = AM - MD.$$

a. Vérifier que  $f$  est linéaire.

b. Déterminer le noyau de  $f$  et donner sa dimension.

c. Quelle est la dimension de l'image de  $f$  ?

d. Déterminer les matrices  $M$  de  $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$  telles que  $f(M) = M$ .

En déduire que 1 est valeur propre de  $f$ .

Montrer que  $-1$  est aussi valeur propre de  $f$ .

e. Est-ce que  $f$  est diagonalisable ?

f. Montrer :  $f \circ f \circ f = f$ .

## EXERCICE 2

On note  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  par :

$$F(x, y) = (x - 1)(y - 2)(x + y - 6).$$

1.a. Montrer que  $(4, 2)$  et  $(2, 3)$  sont des points critiques de  $F$ .

b. Est-ce que  $F$  présente un extrémum local au point  $(4, 2)$  ?  
Est-ce que  $F$  présente un extrémum local au point  $(2, 3)$  ?

2. On note  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , par :

$$\varphi(x) = x(x - 2)(2x - 5).$$

a. Montrer :  $\forall x \in [4; +\infty[$ ,  $(x - 2)(2x - 5) \geq 4$ .

b. En déduire :  $\forall x \in [4; +\infty[$ ,  $\varphi(x) \geq 4x$  et  $\varphi(x) \in [4; +\infty[$ .

3. On considère la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 4$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = F(1 + u_n, u_n).$$

a. Exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$  à l'aide de la fonction  $\varphi$ .

b. Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 4^{n+1}$ .

Quelle est la nature de la série de terme général  $\frac{1}{u_n}$  ?

c. Écrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $u_n \geq 10^{10}$ .

4. On note  $g : [4; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie, pour tout  $x \in [4; +\infty[$ , par :

$$g(x) = \frac{10}{\varphi(x)}.$$

a. Montrer que l'intégrale  $\int_4^{+\infty} g(x) dx$  converge.

b. Trouver trois réels  $a, b, c$  tels que :

$$\forall x \in [4; +\infty[, g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{2x-5}.$$

c. Calculer  $\int_4^{+\infty} g(x) dx$ .

## EXERCICE 3

### PARTIE A

1. Soit  $U$  une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance nulle et de variance  $\frac{1}{2}$ .
  - a. Rappeler l'expression d'une densité de  $U$ .
  - b. En utilisant la définition de la variance de  $U$ , montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$  est convergente et que 
$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Soit  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par 
$$\begin{cases} \forall x \leq 0, & F(x) = 0 \\ \forall x > 0, & F(x) = 1 - e^{-x^2}. \end{cases}$$

2. Montrer que la fonction  $F$  définit une fonction de répartition d'une variable aléatoire dont on déterminera une densité  $f$ .
3. Soit  $X$  une variable aléatoire admettant  $f$  pour densité.
  - a. Montrer que  $X$  admet une espérance  $E(X)$  et que  $E(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .
  - b. Déterminer, pour tout réel  $y$ , la probabilité  $P(X^2 \leq y)$ . On distinguera les cas  $y \leq 0$  et  $y > 0$ .
  - c. Montrer que la variable aléatoire  $X^2$  suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre. En déduire que  $X$  admet une variance  $V(X)$  et calculer  $V(X)$ .

### PARTIE B

1. Soit  $Z$  une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre  $p$ . Ainsi, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $P(Z = k) = p(1-p)^{k-1}$ . Rappeler la valeur de l'espérance  $E(Z)$  et celle de la variance  $V(Z)$  de la variable aléatoire  $Z$ .
2. Soient un entier  $n$  supérieur ou égal à 2 et  $n$  variables aléatoires indépendantes  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  suivant toutes la loi géométrique de paramètre  $p$ . On considère la variable aléatoire  $M_n = \frac{1}{n}(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n)$ .
  - a. Déterminer l'espérance  $m$  et l'écart-type  $\sigma_n$  de  $M_n$ .
  - b. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(0 \leq M_n - m \leq \sigma_n)$  existe et exprimer sa valeur à l'aide de  $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ .