

EXERCICE 1

On considère la matrice carrée d'ordre trois suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer, sans calcul, que A est diagonalisable.
2. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible et symétrique P , de première ligne $(1 \ 1 \ 1)$ et de deuxième ligne $(1 \ -1 \ 0)$, telles que $A = PDP^{-1}$.
Calculer P^{-1} .
3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice A^n par ses éléments.
4. Soient u_0, v_0, w_0 trois nombres réels positifs ou nuls tels que $u_0 + v_0 + w_0 = 1$.

On note $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne définie par la relation de récurrence : $X_n = AX_{n-1}$.

a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = A^n X_0$.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{3} + \left(u_0 - \frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ v_n = \frac{1}{3} + \left(v_0 - \frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ w_n = \frac{1}{3} + \left(w_0 - \frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^n. \end{cases}$$

c. Déterminer les limites respectives u, v, w de u_n, v_n, w_n lorsque le nombre entier n tend vers l'infini.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d_n = \sqrt{(u_n - u)^2 + (v_n - v)^2 + (w_n - w)^2}$.

d. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

e. Déterminer un entier naturel n tel que : $d_n \leq 10^{-2}$.

EXERCICE 2

Préliminaire

On donne : $0,69 < \ln 2 < 0,70$.

On considère l'application :

$$g :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto g(x) = x^2 + \ln x.$$

1. Montrer que g est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet une solution et une seule.

On note α l'unique solution de cette équation.

3. Montrer : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Partie A

On note $I = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et on considère l'application :

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\ln x.$$

1.
 - a. Montrer que f est strictement croissante sur I .
 - b. Montrer : $\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1) < 1$.
 - c. En déduire : $\forall x \in I, f(x) \in I$.
2. On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - a. Calculer u_1 .
 - b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.
 - c. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 - d. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite est le réel α .

Partie B

On considère l'application :

$$F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto F(x, y) = x e^y + y \ln x.$$

1.
 - a. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et calculer les dérivées partielles premières de F en tout point (x, y) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
 - b. Montrer que F admet un point critique et un seul que l'on exprimera à l'aide du nombre réel α .
2. Est-ce que F admet un extremum local ?

EXERCICE 3

1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout nombre réel x par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Montrer que f est une densité de probabilité.

On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité.

2. On définit la variable aléatoire discrète Y à valeurs dans \mathbb{N} de la façon suivante :

- ★ l'événement $(Y = 0)$ est égal l'événement $(X < 1)$,
- ★ pour tout nombre entier strictement positif n , l'événement $(Y = n)$ est égal à l'événement $(n \leq X < n + 1)$.

a. Montrer, pour tout entier naturel n : $P(Y = n) = \left(1 - \frac{1}{e}\right)e^{-n}$.

b. Montrer que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. En déduire l'espérance et la variance de Y .

c. Recopier et compléter le programme ci-dessous pour qu'il simule la variable aléatoire Y .

```
program eml2007;
var y:integer; u:real;
begin
  randomize;
  u:=random; y:=...;
  while ... do
    ... ..
  writeln('y vaut ', y);
end.
```

3. Soit U une variable de Bernoulli telle que $P(U = 1) = P(U = 0) = \frac{1}{2}$.

On suppose que les variables aléatoires U et Y sont indépendantes.

Soit la variable aléatoire $T = (2U - 1)Y$, produit des variables aléatoires $2U - 1$ et Y .

Ainsi, T est une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{Z} , l'ensemble des entiers relatifs.

a. Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance $E(T)$ et calculer $E(T)$.

b. Vérifier que $T^2 = Y^2$.

En déduire que la variable aléatoire T admet une variance $V(T)$ et calculer $V(T)$.

c. Pour tout nombre entier relatif n , calculer la probabilité $P(T = n)$.

4. Soit la variable aléatoire $D = X - Y$. On note F_D la fonction de répartition de D .

a. Justifier : $\forall t \in]-\infty; 0[$, $F_D(t) = 0$, et : $\forall t \in [1; +\infty[$, $F_D(t) = 1$.

b. Soit $t \in [0; 1[$. Exprimer l'événement $(D \leq t)$ à l'aide des événements $(n \leq X \leq n + t)$, $n \in \mathbb{N}$.

c. Pour tout nombre réel $t \in [0; 1[$ et pour tout nombre entier naturel n , calculer la probabilité $P(n \leq X \leq n + t)$.

d. Montrer : $\forall t \in [0; 1[$, $F_D(t) = \frac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-1}}$.

e. Montrer que D est une variable aléatoire à densité. Déterminer une densité de D .