EXERCICE 1

On admet l'encadrement suivant : $2,7 < \mathrm{e} < 2,8$.

Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application $f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t\ln t - t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0\,;+\infty[$.

2. Justifier que f est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in]0\,;+\infty[$.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4. Dresser le tableau des variations de f.

5. Montrer que f est convexe sur $]0\,;+\infty[$.

6. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

a. Montrer que Γ admet une demi-tangente en O.

b. Déterminer les points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses.

c. Préciser la nature de la branche infinie de Γ.

d. Tracer Γ.

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère l'application $G :]1\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in]1\,;+\infty[$, par :

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que G est de classe C^2 sur $]1\,;+\infty[$ et que, pour tout $x \in]1\,;+\infty[$:

$$G'(x) = \frac{1}{2}\big(f(x+1) - f(x-1)\big)$$

$$\text{et } \; G''(x) = \frac{1}{2}\big(\ln(x+1) - \ln(x-1)\big).$$

À cet effet, on pourra faire intervenir une primitive F de f sans chercher à calculer F.

2. a. Montrer que G' est strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$.

b. Vérifier : $G'(2) > 0$.

c. Établir que l'équation $G'(x) = 0$, d'inconnue $x \in]1\,;+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que $\alpha < 2$.

Partie III : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère l'application $\Phi :]1\,;+\infty[^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $(x,y) \in]1\,;+\infty[^2$, par :

$$\Phi(x,y) = \big(y - f(x+1)\big)^2 + \big(y - f(x-1)\big)^2, \text{ où l'application } f \text{ est définie dans la partie } \mathbf{I}.$$

1. Justifier que Φ est de classe C^2 sur $]1\,;+\infty[^2$ et calculer les dérivées partielles premières de Φ en tout (x,y) de $]1\,;+\infty[^2$.

2. Vérifier que $\big(\alpha, f(\alpha+1)\big)$ est un point critique de Φ, où α est défini en **II 2.c**.

3. Est-ce que Φ admet un extrémum local en $\big(\alpha, f(\alpha+1)\big)$?

EXERCICE 2

On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie I : Réduction simultanée de A et B

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

2. En déduire une matrice carrée P d'ordre trois, inversible, de deuxième ligne $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, telle que $A = PDP^{-1}$, et calculer P^{-1}.

3. Calculer la matrice $C = P^{-1}BP$ et vérifier que C est diagonale.

Partie II : Étude d'un endomorphisme d'un espace de matrices

On note E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre trois, et on considère l'application $f : E \longrightarrow E$ qui, à toute matrice M carrée d'ordre trois, associe $f(M) = AM - MB$.

1. Donner la dimension de E.

2. Vérifier que f est un endomorphisme de E.

3. Soit $M \in E$. On note $N = P^{-1}MP$, où P est définie en **I.2** .

a. Montrer : $M \in \operatorname{Ker}(f) \iff DN = NC$.

b. Déterminer les matrices N carrées d'ordre trois telles que : $DN = NC$.

c. Montrer que l'ensemble des matrices N carrées d'ordre trois telles que $DN = NC$ est un espace vectoriel, et en déterminer une base et la dimension.

4. **a.** En déduire la dimension de $\operatorname{Ker}(f)$, puis la dimension de $\operatorname{Im}(f)$.

b. Donner au moins un élément non nul de $\operatorname{Ker}(f)$ et donner au moins un élément non nul de $\operatorname{Im}(f)$.

Exercice 3

Les parties **I** et **II** sont indépendantes.

Partie I : Étude d'une variable aléatoire

1. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :
$$\forall x \in [0\,;1], \quad h(x) = \frac{x}{2-x}.$$

a. Montrer que h est une bijection de $[0\,;1]$ sur $[0\,;1]$ et, pour tout $y \in [0\,;1]$, exprimer $h^{-1}(y)$.

b. Déterminer deux réels α et β vérifiant : $\forall x \in [0\,;1], \quad h(x) = \alpha + \dfrac{\beta}{2-x}$.

c. Calculer $\displaystyle\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x$.

2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;1]$.

a. Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

b. Pour tout réel y de $[0\,;1]$, déterminer la probabilité de l'événement $\left(\dfrac{X}{2-X} \leqslant y\right)$.

c. Montrer que la variable aléatoire $Y = \dfrac{X}{2-X}$ admet une densité et déterminer une densité g de Y.

d. Montrer que Y admet une espérance $\mathrm{E}(Y)$ et déterminer $\mathrm{E}(Y)$.

Partie II : Étude d'un temps d'attente

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une réunion est prévue entre n invités que l'on note $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Chaque invité arrivera entre l'instant 0 et l'instant 1.

Pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on modélise l'instant d'arrivée de l'invité I_k par une variable aléatoire T_k de loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;1]$. On suppose de plus que, pour tout réel t, les n événements $(T_1 \leqslant t), (T_2 \leqslant t), \ldots, (T_n \leqslant t)$ sont indépendants.

1. Soit un réel t appartenant à $[0\,;1]$. Pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on note B_k la variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 1 si l'événement $(T_k \leqslant t)$ est réalisé et la valeur 0 sinon. On note $S_t = B_1 + B_2 + \cdots + B_n$.

a. Que modélise la variable aléatoire S_t ?

b. Déterminer la loi de la variable aléatoire S_t.

2. Soit R_1 la variable aléatoire égale à l'instant de la première arrivée.

a. Soit un réel t appartenant à $[0\,;1]$. Comparer l'événement $(R_1 > t)$ et l'événement $(S_t = 0)$.

b. Montrer que la variable aléatoire R_1 admet une densité et en déterminer une.

3. Soit R_2 la variable aléatoire égale à l'instant de la deuxième arrivée.
Montrer que la variable aléatoire R_2 admet une densité et en déterminer une.

★ ★ ★