d. Montrer que la courbe représentative de f admet une droite asymptote, lorsque la variable tend vers $-\infty$.

e. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α, que l'on calculera.

2. **a.** Établir : $\qquad \forall x \in [0\,;+\infty[,\quad e^{2x} - 2x\,e^{x} - 1 \geqslant 0.$

b. Montrer : $\qquad \forall x \in]0\,;+\infty[,\quad f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^{2x} - 2x\,e^{x} - 1}{2(e^{x}-1)^2}.$

c. Montrer : $\qquad \forall x \in [0\,;+\infty[,\quad -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0.$

d. Établir : $\qquad \forall n \in \mathbb{N},\quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|.$

3. En déduire : $\qquad \forall n \in \mathbb{N},\quad |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}(1-\alpha).$

4. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

5. Écrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt.$$

1. Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(3-e^{x})}{e^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2. **a.** Montrer : $\qquad \forall x \in [0\,;+\infty[,\quad 0 \leqslant G(x) \leqslant x f(x).$
En déduire la limite de G en $+\infty$.

b. Montrer : $\qquad \forall x \in]-\infty\,;0],\quad G(x) \leqslant x f(x).$
En déduire la limite de G en $-\infty$.

3. Dresser le tableau des variations de G. On n'essaiera pas de calculer $G(\ln 3)$.

Exercice 2

On considère les matrices carrées d'ordre trois : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Partie I : Réduction de A

1. Est-ce que A est inversible ?

2. Déterminer les valeurs propres de A.
Justifier, sans calcul, que A est diagonalisable.

3. Déterminer une matrice carrée P d'ordre trois, inversible, dont tous les termes diagonaux sont égaux à 1, telle que $A = PDP^{-1}$ et calculer P^{-1}.

Partie II : Résolution de l'équation $M^2 = A$

On se propose de résoudre l'équation (1) : $M^2 = A$, d'inconnue M, matrice carrée d'ordre trois.
Soit M une matrice carrée d'ordre trois. On note $N = P^{-1}MP$. (La matrice P a été définie en **I.3.**)

1. Montrer : $M^2 = A \iff N^2 = D$.

2. Établir que, si $N^2 = D$, alors $ND = DN$.

3. En déduire que, si $N^2 = D$, alors N est diagonale.

4. Déterminer toutes les matrices diagonales N telles que $N^2 = D$.

5. En déduire la solution B de l'équation (1) dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.

Partie III : Intervention d'un polynôme

1. Montrer qu'il existe un polynôme Q de degré deux, et un seul, que l'on calculera, tel que :

$$Q(0) = 0, \quad Q(1) = 1, \quad Q(4) = 2.$$

2. En déduire : $-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = B$. (La matrice B a été définie en **II.5.**)

3. Montrer, pour toute matrice carrée F d'ordre trois :

$$AF = FA \iff BF = FB.$$

EXERCICE 3

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q.
Ainsi, on a : $0 < p < 1$, $\;0 < q < 1$ et $p + q = 1$.

Partie I : Tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.

On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Reconnaître la loi de T. Pour tout entier $k \geqslant 1$, donner $\mathrm{P}(T = k)$ et rappeler l'espérance et la variance de T.

2. En déduire que U admet une espérance et une variance. Déterminer $\mathrm{E}(U)$ et $\mathrm{V}(U)$.

Partie II : Tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
On note Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.
Ainsi, on peut remarquer que la probabilité de l'événement $\big(Y = 1\big) \cup \big(Z = 1\big)$ est égale à 1.
Pour tout entier naturel non nul i, on note :
B_i l'événement « la i-ème boule tirée est blanche »,
N_i l'événement « la i-ème boule tirée est noire ».

1. **a.** Montrer, pour tout entier $k \geqslant 2$: $\quad \mathrm{P}(X = k) = qp^{k-1} + pq^{k-1}$.

b. Vérifier : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k) = 1$.

c. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que : $\mathrm{E}(X) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$.

2. **a.** Pour tout entier $k \geqslant 2$, déterminer $\mathrm{P}\big((X = k) \cap (Y = 1)\big)$.
(On distinguera les cas $k = 2$ et $k \geqslant 3$.)

b. En déduire : $\quad \mathrm{P}(Y = 1) = q(1 + p)$.

c. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

On admet que l'espérance de Y existe et que : $\mathrm{E}(Y) = \dfrac{1}{q}\big(1 - p + p^2\big)$.

3. Donner la loi de Z et son espérance.

4. Montrer que les variables aléatoires YZ et $X - 1$ sont égales.

5. Montrer que le couple (Y, Z) admet une covariance et exprimer $\mathrm{Cov}(Y, Z)$ à l'aide de $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$ et $\mathrm{E}(Z)$.