Partie II : Réduction d'une matrice carrée d'ordre 3

On note : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que -4, 1, 16 sont valeurs propres de M et déterminer, pour chacune de celles-ci, une base du sous-espace propre associé. Est-ce que M est diagonalisable ?

2. Déterminer une matrice P carrée d'ordre 3, inversible, de première ligne égale à $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, telle que $M = PDP^{-1}$.

3. Vérifier que $(D+4I)(D-I)(D-16I)$ est la matrice nulle.

4. En déduire : $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$.

5. Établir : $u^3 = 13u^2 + 52u - 64e$, où e désigne l'application identité de $\mathcal{S}_2$ et où u a été définie dans la partie I.

Exercice 2

On note $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application de classe C^2, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = x - \ln(1+x^2)$$

et C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

On donne la valeur approchée : $\ln 2 \approx 0,69$.

Partie I : Étude de f et tracé de C

1. **a.** Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$.

b. En déduire le sens de variation de f.

c. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.

3. Déterminer la nature des branches infinies de C.

4. Montrer que C admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

5. Tracer C. On utilisera un repère orthonormé d'unité graphique 2 centimètres, et on précisera la tangente à C en l'origine et en chacun des points d'inflexion.

6. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x$.
À cet effet, on pourra utiliser le changement de variable défini par $t = 1 + x^2$.

Partie II : Étude d'une suite et d'une série associées à f

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

2. Établir que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.

3. Écrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche un entier n tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$.

4. **a.** Établir : $\forall x \in [0\,;1], \quad f(x) \leqslant x - \dfrac{1}{2}x^2.$

b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^2 \leqslant 2(u_n - u_{n+1}).$

c. Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge.

Partie III : Étude d'une fonction de deux variables réelles associée à f

On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$F(x,y) = f(x+y) - f(x) - f(y).$$

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les dérivées partielles premières de F en (x, y), à l'aide de f', x et y.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} f'(x) = f'(y) \\ f'(x+y) = f'(x) \end{cases}$. En déduire les points critiques de F.

3. Est-ce que F admet un minimum local ?

Exercice 3

Les deux parties sont indépendantes.

Partie I

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.

On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée de l'opération des clients C_1, C_2, C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0\,;1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.

On note A l'événement : « C_3 termine en dernier son opération ».
Ainsi l'événement A est égal à l'événement : $\big(\min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2)\big)$.
On se propose de calculer la probabilité de A.

1. Rappeler la loi de X_1 ainsi que son espérance $\mathrm{E}(X_1)$ et sa variance $\mathrm{V}(X_1)$.

On définit la variable aléatoire Δ par $\Delta = |X_1 - X_2|$.

2. Calculer la probabilité $\mathrm{P}(\Delta = 0)$.

3. Soit n un entier naturel non nul.

a. Justifier : $\mathrm{P}(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X_2 = k)\mathrm{P}(X_1 = n + k)$.

b. En déduire : $\mathrm{P}(\Delta = n) = \dfrac{2pq^n}{1+q}$.

4. **a.** Montrer que Δ admet une espérance $\mathrm{E}(\Delta)$ et la calculer.

b. Montrer : $\mathrm{E}\big((X_1 - X_2)^2\big) = 2\mathrm{V}(X_1)$. En déduire que Δ admet une variance $\mathrm{V}(\Delta)$ et la calculer.

5. Montrer que l'événement A est égal à l'événement $\big(X_3 > \Delta\big)$.

6. **a.** En déduire : $\mathrm{P}(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\Delta = k)\mathrm{P}(X_3 > k)$.

b. Exprimer $\mathrm{P}(A)$ à l'aide de p et q.

Partie II

Dans cette partie, X est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0\,;1[$ et Y est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda \in]0\,;+\infty[$.
On note $q = 1 - p$.

On suppose que X et Y sont indépendantes, c'est à dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0\,;+\infty[, \quad \mathrm{P}\big((X = k) \cap (Y \leqslant t)\big) = \mathrm{P}(X = k)\,\mathrm{P}(Y \leqslant t).$$

1. Rappeler une densité de Y ainsi que son espérance et sa variance.

2. On définit la variable aléatoire Z par $Z = \dfrac{Y}{X}$.

a. Montrer : $\forall t \in [0\,;+\infty[, \quad \mathrm{P}(Z \geqslant t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k)\,\mathrm{P}(Y \geqslant kt)$.

b. En déduire : $\forall t \in [0\,;+\infty[, \quad \mathrm{P}(Z \geqslant t) = \dfrac{p\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}{1 - q\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}$.

c. Montrer que la variable aléatoire Z admet une densité et déterminer une densité de Z.

★ ★ ★