Établir que $\mathcal{B} = \left(e_1, \sum_{i=1}^{2n+1} e_i\right)$ constitue une base de $\mathrm{Im}(t)$. Écrire la matrice associée à $\widetilde{t}$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

5. a) Soit λ une valeur propre non nulle de t, et x un vecteur propre associé à λ. Montrer que x appartient à $\mathrm{Im}(t)$.

b) En déduire toutes les valeurs propres de t. L'endomorphisme t est-il diagonalisable ?

PROBLÈME

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont considérées comme définies sur des espaces probabilisés non nécessairement identiques, mais qui, par souci de simplification, seront tous notés $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Partie I

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{1}{2} \times e^{-|x|}$.

a) Montrer que les intégrales $\int_{-\infty}^{0} g(x)dx$ et $\int_{0}^{+\infty} g(x)dx$ sont convergentes et de même valeur.

b) Établir que g est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Soit Y une variable aléatoire à valeurs réelles admettant g pour densité. *On dit que Y suit la loi $\mathcal{L}(0)$.*

2. Étudier les variations de g et tracer l'allure de sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

3. a) Montrer, pour tout r de $\mathbb{N}$, l'existence du moment $m_r(Y)$ d'ordre r de la variable aléatoire Y.

b) Calculer, pour tout r de $\mathbb{N}$, $m_r(Y)$ en fonction de r. Quelles sont les valeurs de l'espérance $E(Y)$ et de la variance $V(Y)$ de la variable aléatoire Y ?

4. a) Déterminer la fonction de répartition G de Y.

b) Établir que G est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.

c) Montrer que l'équation $G(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution que l'on déterminera.

d) Établir que la fonction qui, à tout réel x associe $G(x)(1 - G(x))$, est paire.

5. a) Montrer que l'application réciproque G^{-1} de G est définie par :

$$G^{-1}(x) = \begin{cases} \ln(2x) & \text{si } 0 < x \leqslant 1/2 \\ -\ln(2(1-x)) & \text{si } 1/2 \leqslant x < 1 \end{cases}$$

b) Écrire une fonction Pascal dont l'en-tête est `Laplace` qui permet de simuler la loi $\mathcal{L}(0)$. On rappelle que la fonction `random` permet de simuler en Pascal une loi uniforme sur $]0, 1[$.

6. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère la fonction g_n définie par :

$$g_n(x) = g(x)(1 + xe^{-n|x|})$$

Montrer que g_n définit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on désigne par Y_n une variable aléatoire de densité g_n, et on note G_n la fonction de répartition de Y_n.

7. a) Établir pour tout réel x, la majoration suivante : $|G_n(x) - G(x)| \leqslant \frac{1}{ne} \times G(x)$.

b) En déduire que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{L}(0)$.

Partie II

Soit θ un paramètre réel inconnu et X une variable aléatoire à densité. *On dit que X suit la loi $\mathcal{L}(\theta)$*, si une densité f de X est donnée par : pour tout x réel, $f(x) = \dfrac{e^{-|x-\theta|}}{2}$.

Soit n un entier naturel . On considère un $(2n+1)$–échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_{2n+1})$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi $\mathcal{L}(\theta)$.

1. a) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

b) En déduire que la variable aléatoire $(X - \theta)$ suit la loi $\mathcal{L}(0)$ définie dans la partie I.

c) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

d) Résoudre l'équation $F(x) = 1/2$.

2. Soit x un réel fixé. Pour tout i de $[\![1, 2n+1]\!]$, on note Z_i la variable aléatoire de Bernoulli telle que $P([Z_i = 1]) = P([X_i \leqslant x])$.

a) Établir l'indépendance des variables aléatoires $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{2n+1}$.

b) Soit S_{2n+1} la variable aléatoire définie par : $S_{2n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{2n+1} Z_i$. Quelle est la loi de probabilité de S_{2n+1} ? Préciser l'espérance et la variance de S_{2n+1}.

3. On pose $\overline{X}_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1} \displaystyle\sum_{i=1}^{2n+1} X_i$.

a) Montrer que $\overline{X}_{2n+1}$ est un estimateur sans biais du paramètre θ.

b) Calculer le risque quadratique de $\overline{X}_{2n+1}$ en θ.

Partie III

Le contexte de cette partie est identique à celui de la partie précédente.

Pour tout ω de Ω, on réordonne par ordre croissant les réels $X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_{2n+1}(\omega)$, et on note $\widehat{X_1}(\omega), \widehat{X_2}(\omega), \ldots, \widehat{X}_{2n+1}(\omega)$, les nombres ainsi rangés, c'est-à-dire que $\widehat{X_1}(\omega) \leqslant \widehat{X_2}(\omega) \leqslant \cdots \leqslant \widehat{X}_{2n+1}(\omega)$. On définit ainsi $(2n+1)$ variables aléatoires $\widehat{X_1}, \widehat{X_2}, \ldots, \widehat{X}_{2n+1}$ telles que $\widehat{X_1} \leqslant \widehat{X_2} \leqslant \cdots \leqslant \widehat{X}_{2n+1}$, qui constituent un réarrangement par ordre croissant des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_{2n+1}$. On admet que $P([\widehat{X_1} < \widehat{X_2} < \cdots < \widehat{X}_{2n+1}]) = 1$.

On s'intéresse dans cette partie à la variable aléatoire $\widehat{X}_{n+1}$.

1. a) Pour tout réel x, justifier l'égalité entre événements suivante : $[\widehat{X}_{n+1} \leqslant x] = [S_{2n+1} \geqslant n+1]$.

b) En déduire la fonction de répartition $\widehat{F}_{n+1}$ de $\widehat{X}_{n+1}$ en fonction de F (on exprimera cette fonction sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer).

2. On note $\widehat{f}_{n+1}$ une densité de $\widehat{X}_{n+1}$, et $\widehat{g}_{n+1}$ une densité de $(\widehat{X}_{n+1} - \theta)$.

a) Établir pour tout j de $[\![0, 2n]\!]$, l'égalité suivante : $(j+1)\dbinom{2n+1}{j+1} = (2n-j+1)\dbinom{2n+1}{j}$.

b) En déduire, pour tout x réel, l'égalité :

$$\widehat{f}_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}(F(x))^n(1-F(x))^n f(x)$$

c) Établir, pour tout x réel, l'égalité suivante :

$$\widehat{g}_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}(G(x))^n(1-G(x))^n g(x)$$

où g et G ont été définies dans la partie I.

d) En utilisant la question I.4.d, montrer que $\widehat{X}_{n+1}$ est un estimateur sans biais du paramètre θ.

3. *Dans cette question, on étudie le comportement de la suite $(\widehat{X}_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, lorsque n tend vers $+\infty$.*

On désigne par $\widehat{h}_{n+1}$ une densité de la variable aléatoire $\sqrt{2n+1}(\widehat{X}_{n+1}-\theta)$.

a) Montrer que pour tout réel x, on a :

$$\widehat{h}_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \times \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\left(G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)^n \times \left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)^n \times g\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)$$

b) Écrire, lorsque u tend vers 0, le développement limité à l'ordre 2 de e^{-u}, et le développement limité à l'ordre 1 de $\ln(1-u)$.

c) Soit x un réel fixé. Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(1-\frac{x^2}{2n+1}+o\left(\frac{1}{(2n+1)}\right)\right)$$

d) En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 4^n\left[G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)\right]^n = e^{-x^2/2}$.

e) On admet que lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$\binom{2n}{n} \times \frac{1}{4^n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Montrer alors que pour tout réel x, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \widehat{h}_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

4. On admet que le résultat de la question précédente entraîne la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(\sqrt{2n+1}(\widehat{X}_{n+1}-\theta))_n$ vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Montrer qu'un intervalle de confiance $[I_n, J_n]$ pour le paramètre θ au risque $\alpha = 0.05$, est donné par :

$$I_n = \widehat{X}_{n+1} - \frac{1.96}{\sqrt{2n+1}} \quad \text{et} \quad J_n = \widehat{X}_{n+1} + \frac{1.96}{\sqrt{2n+1}}$$

(on rappelle que si Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, on a $\Phi(1.96) \approx 0.975$).