c) Montrer que la matrice M associée à u dans la base $(x, u(x))$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$, où a et b sont deux réels, indépendants de la base $(x, u(x))$, que l'on exprimera en fonction de $d(A)$ et $t(A)$.

d) En déduire que la matrice A est semblable à sa transposée ${}^tA$.

5. Soit A un élément donné de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}(A)$ l'ensemble défini par : $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ AB = BA\}$.

a) Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Déterminer une base et la dimension de $\mathcal{C}(A)$ (on discutera selon que A est ou n'est pas colinéaire à I).

PROBLÈME

Dans tout le problème, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et la relation :
pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

La partie II est indépendante de la partie I et la partie III est indépendante de la partie II.

Partie I. Analyse

1. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.

b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Dans toute la suite du problème, a et b ($a > b$) désignent les deux solutions de l'équation du second degré suivante : $x^2 - x - 1 = 0$.

2. a) Montrer que : $b = 1 - a = -\dfrac{1}{a}$. Établir l'encadrement suivant : $1 < a < 2$.

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$.

c) En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\beta_n = u_{n+1} - au_n$. Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}$, β_n en fonction de n et b.

4. On rappelle que pour tout réel x, la partie entière de x est l'entier noté $\lfloor x \rfloor$ qui vérifie : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

a) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'égalité suivante : $\lfloor au_{2n} \rfloor = u_{2n+1} - 1$.

b) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\lfloor au_{2n-1} \rfloor$ en fonction de u_{2n}.

5. Soit y un réel fixé vérifiant $|y| < 1$ et k un entier fixé de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^k y^n$ est absolument convergente.

b) En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^k \frac{u_n}{2^{n+1}}$.

c) En utilisant la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$.

Partie II. Algèbre et algorithmique

6. Soit A la matrice carrée d'ordre 4 définie par : $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) La matrice A est-elle inversible ? A est-elle diagonalisable ?

b) Calculer A^2 et A^3. Vérifier que A^3 est une combinaison linéaire de A et A^2.

c) Déterminer les valeurs propres de A.

d) Établir l'existence de deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on ait : $A^n = a_nA + b_nA^2$.

e) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifient une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

7. On propose la fonction Pascal suivante :

```
Function f(n : integer) : integer ;
var temp,u,v,k : integer ;
Begin
u := 0 ; v := 1 ;
for k := 1 to n-1 do
      Begin
      temp := _____ ;  v := _____ ;  u := _____
      end ;
f := ____
end ;
```

Compléter cette fonction aux quatre places signalées par des tirets de façon que la valeur rendue soit u_n.

8. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On dit que n admet une *Z-décomposition* s'il existe un entier r de $\mathbb{N}^*$ tel que l'on puisse écrire : $n = u_{k_1} + u_{k_2} + \cdots + u_{k_r}$, où, pour tout i de $[\![1, r]\!]$, k_i est un entier supérieur ou égal à 2 et où, pour tout i de $[\![1, r-1]\!]$ (avec $r \geqslant 2$), on a : $k_{i+1} - k_i \geqslant 2$.

a) Montrer que les entiers 37 et 272 admettent une Z-décomposition.

b) Soit n un entier admettant une Z-décomposition de la forme : $n = u_{k_1} + u_{k_2} + \cdots + u_{k_r}$. Montrer, par récurrence sur r, que l'on a : $n < u_{k_r+1}$. En déduire l'unicité de r.

c) Montrer que, pour tout entier p supérieur ou égal à 2, tout entier n qui vérifie $1 \leqslant n \leqslant u_p$ admet une unique Z-décomposition (on pourra faire un raisonnement par récurrence sur p).

9. On suppose que l'on a défini en Pascal une constante `p` et un type `tab` par les instructions suivantes :

```
const p=20 ; type tab=array[2..p] of integer
```

On suppose également que l'on a défini une variable `u` de type `tab` telle que, pour tout k de $[\![2, p]\!]$, la variable `u[k]` contient la valeur u_k. On se donne un entier n vérifiant : $1 \leqslant n \leqslant u_p$.

Rédiger la procédure d'en-tête : `procedure Z (n : integer ; var Res : tab)` de façon que :

$$\texttt{Res}[k] = \begin{cases} u_{k_1} & \text{si } k = k_1 \\ u_{k_2} & \text{si } k = k_2 \\ \vdots & \vdots \\ u_{k_r} & \text{si } k = k_r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Expliquer et justifier l'algorithme utilisé.

Partie III. Probabilités

On effectue dans une urne qui contient des boules numérotées 0 ou 1 une suite illimitée de tirages avec remise d'une boule. À chaque tirage, la probabilité de tirer une boule numérotée 1 est p $(0 < p < 1)$ et la probabilité de tirer une boule numérotée 0 est q, avec $q = 1 - p$, et on suppose que les résultats des différents tirages sont indépendants.

On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On s'intéresse au nombre de tirages nécessaires pour obtenir deux boules numérotées 1 de suite, c'est-à-dire lors de deux tirages consécutifs.

On définit, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, les événements S_i : « le i-ième tirage donne une boule numérotée 1 », et $B_i = S_i \cap S_{i+1}$.

Si au moins un des événements B_i se réalise au cours de l'expérience, on note Y la valeur de l'entier i correspondant au premier événement B_i réalisé. Sinon, c'est-à-dire si aucun des événements B_i ne se réalise, on attribue à Y la valeur 0. On admet que Y est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Par exemple, si le résultat de l'expérience est : $0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, \ldots$, alors Y prend la valeur 6.

10. a) Calculer, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, la probabilité $P(B_i)$.

b) Déterminer $Y(\Omega)$. Calculer $P([Y=1]), P([Y=2])$ et $P([Y=3])$.

11. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note C_n l'événement : « lors des n premiers tirages, il n'apparaît jamais deux fois de suite une boule numérotée 1 ». On pose : $C_0 = \Omega$.

a) Calculer $P(C_0)$, $P(C_1)$ et $P(C_2)$.

b) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}$, la relation : $P([Y = n+2]) = p^2 q P(C_n)$.

12. a) En considérant les résultats possibles des deux premiers tirages, montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'égalité : $P(C_n) = qP(C_{n-1}) + pqP(C_{n-2})$.

b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre $P([Y=n+2]), P([Y=n+1])$ et $P([Y=n])$.

13. *On suppose dans cette question que $p = q = 1/2$.*

a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $P([Y=n]) = \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$, où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a été définie dans le préambule du problème.

b) Que vaut $P([Y=0])$?

c) On note $E(Y)$ l'espérance de Y. Montrer que $E(Y) = 5$.

d) Calculer la variance $V(Y)$ de Y.

14. *On revient au cas général : $0 < p < 1$ et $q = 1 - p$.*

a) Montrer que l'équation du second degré $x^2 - qx - pq = 0$ admet deux racines distinctes. On les note r et s, avec $r > s$.

b) Établir les inégalités suivantes : $-1 < s < 0 < r < 1$ et $r > |s|$.

c) On pose : $\Delta = q^2 + 4pq$. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $P([Y=n]) = \dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}}(r^n - s^n)$.

d) Calculer $P([Y=0])$.

e) Montrer que Y admet des moments de tous ordres et calculer l'espérance de Y.

15. a) Montrer, pour tout réel x vérifiant $|x| < \dfrac{1}{r}$, la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} P([Y=n])x^n$. On pose alors :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P([Y=n])x^n.$$

b) Établir, pour tout réel x vérifiant $|x| < \dfrac{1}{r}$, la formule suivante : $g(x) = \dfrac{p^2 x}{1 - qx - pqx^2}$.

16. *On suppose dans cette question que $p = 2/3$.*

a) Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $I = \left]-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right[$.

b) Montrer l'existence d'un unique réel α de $\left]-\dfrac{1}{2}, 0\right[$ tel que g soit concave sur l'intervalle $\left]-\dfrac{3}{2}, \alpha\right[$ et convexe sur l'intervalle $\left]\alpha, \dfrac{3}{2}\right[$.

c) Tracer l'allure de la courbe représentative de g sur I dans le plan rapporté à un repère orthonormé.