c) Établir alors que pour tout couple (A, B) de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, on a $||AB|| \leqslant ||A|| \times ||B||$.

On dit qu'une suite $(A_m)_{m\geqslant 0}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ converge vers une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $\lim\limits_{m\to+\infty} ||A_m - A|| = 0$. On pose $A_m = (a_{i,j}(m))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

3. a) Montrer que $(A_m)_{m\geqslant 0}$ converge vers A si et seulement si pour tout (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$: $\lim\limits_{m\to+\infty} a_{i,j}(m) = a_{i,j}$.

b) Montrer que si $(A_m)_{m\geqslant 0}$ converge vers A et $(B_m)_{m\geqslant 0}$ converge vers B, alors $(A_mB_m)_{m\geqslant 0}$ converge vers AB.

4. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $||A|| < 1$.

a) Déterminer $\lim\limits_{m\to+\infty} A^m$.

b) Montrer que si λ est une valeur propre réelle de A, alors $|\lambda| < 1$. En déduire que les matrices $I - A$ et $I + A$ sont inversibles.

c) Montrer que la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{m} A^k\right)_m$ converge, et exprimer sa limite en fonction de la matrice A.

Soit $(A_m)_{m\geqslant 0}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que la série de terme général A_m (qu'on notera $\sum\limits_{m\geqslant 0} A_m$) converge, si la suite $\left(\sum\limits_{m=0}^{p} A_m\right)_p$ converge. Dans ce cas, sa limite est notée $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} A_m$.

5. On considère dans cette question, une matrice non nulle N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété suivante : il existe un entier p supérieur ou égal à 2 tel que $N^p = 0$ et $N^{p-1} \neq 0$.

a) Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} N^k$ converge. On note $M = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} N^k$.

b) Montrer que $\{X \in \mathbb{R}^n / (M - I)X = 0\} = \{X \in \mathbb{R}^n / NX = 0\}$.

6. a) Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} D^k$ converge.

b) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, D une matrice diagonale et P une matrice inversible telles que $A = PDP^{-1}$. Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} A^k$ converge, et exprimer sa somme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ en fonction de P et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} D^k$.

On admet **jusqu'à la fin du problème** *que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} A^k$ converge, et on note : $\exp(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$.*

7. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose, pour tout m de $\mathbb{N}^*$: $A_m = \left(I + \frac{1}{m} A\right)^m$.

a) Établir l'inégalité :

$$\left\| \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k - A_m \right\| \leqslant \sum_{k=0}^{m} \left(1 - \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{m^k}\right) \frac{||A||^k}{k!}$$

b) En déduire que la suite $(A_m)_m$ converge vers $\exp(A)$.

B. Propriétés de l'exponentielle de matrice

On admet que si A et B sont éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $AB = BA$, alors, $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

1. Montrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice $\exp(A)$ est inversible et déterminer son inverse.

2. a) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice S_A telle que $\exp(A) - I = A(I + S_A)$.

b) Étudier la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $x \longmapsto e^x - 1 - 2x$.

c) En déduire que si $||A|| < 1$, alors $||S_A|| < 1$.

d) On suppose que $||A|| < 1$ et que $\exp(A) = I$. Montrer que A est la matrice nulle.

3. On note $\mathcal{S}_n$ l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre n, et $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques réelles d'ordre n dont les valeurs propres sont strictement positives.

a) Montrer que si A est un élément de $\mathcal{S}_n$, alors $\exp(A)$ est un élément de $\mathcal{S}_n^{++}$.

b) Montrer que l'application exp restreinte à $\mathcal{S}_n$ est une surjection de $\mathcal{S}_n$ sur $\mathcal{S}_n^{++}$.

4. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{S}_n$ telles que $\exp(A) = \exp(B)$. On note u (resp. v) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A (resp. B), et $\exp(u)$ (resp. $\exp(v)$) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $\exp(A)$ (resp. $\exp(B)$).

a) Montrer que A et B ont les mêmes valeurs propres.

b) Montrer que $A \times \exp(B) = \exp(B) \times A$.

c) Soit F un sous-espace propre de v.

i) Montrer que F est également un sous-espace propre de $\exp(v)$.

ii) Montrer que la restriction de u à F induit un endomorphisme de F diagonalisable.

d) En se plaçant dans une base de diagonalisation de v, montrer alors que u et v ont les mêmes vecteurs propres. En déduire que $A = B$.

Partie II

1. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $f(e_1) = 0$, et pour tout i de $[\![2, n]\!]$, $f(e_i) = e_{i-1}$.

On note N la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{B}$. Déterminer, pour tout k de $\mathbb{N}$, la matrice N^k.

2. Soit p un réel de $]0,1[$. On définit les matrices R_p et Q_p par : $R_p = (1-p)I + pN = I + Q_p$.

a) Établir l'égalité : $\exp(Q_p) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} e^{-p}\frac{p^j}{j!}N^j$.

b) Calculer $||R_p||$ et $||Q_p||$. Montrer que $||\exp(Q_p)|| \leqslant 1$.

3. a) Soit m un entier supérieur ou égal à 1, et $p_1, p_2, \ldots, p_m$ des réels de l'intervalle $]0,1[$.

On pose pour tout i de $[\![1, m]\!]$, $R_i = R_{p_i}$ et $Q_i = Q_{p_i}$. Montrer les égalités suivantes :

$$\prod_{k=1}^{m} \exp(Q_k) = \exp\left(\sum_{k=1}^{m} Q_k\right) = \exp\Big(\Big[-\sum_{k=1}^{m} p_k\Big](I-N)\Big)$$

b) Établir la relation suivante :

$$\prod_{k=1}^{m} R_k - \prod_{k=1}^{m} \exp(Q_k) = [R_1 - \exp(Q_1)]\,(R_2 \times \cdots \times R_m) - \exp(Q_1)\,[\exp(Q_2) \times \cdots \times \exp(Q_m) - R_2 \times \cdots \times R_m]$$

c) En déduire la majoration suivante : $\displaystyle\left\|\prod_{k=1}^{m} R_k - \prod_{k=1}^{m} \exp(Q_k)\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{m} \|R_k - \exp(Q_k)\|$.

4. a) Montrer l'égalité : $||\exp(Q_1) - R_1|| = |e^{-p_1} - 1 + p_1| + p_1|e^{-p_1} - 1| + e^{-p_1}\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}\frac{p_1^k}{k!}$.

b) En déduire successivement les deux inégalités :

$$||\exp(Q_1) - R_1||| \leqslant 2p_1^2 \quad \text{et} \quad \left\|\prod_{k=1}^{m} R_k - \prod_{k=1}^{m}\exp(Q_k)\right\| \leqslant 2\sum_{k=1}^{m} p_k^2$$

Partie III.

Les notations sont celles de la partie II.

On considère m pièces de monnaie ($1 \leqslant m < n$), telles que pour tout i de $[\![1, m]\!]$, la i-ième pièce donne Pile avec la probabilité p_i, et Face avec la probabilité $1 - p_i$. On pose $\lambda = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i$.

Un joueur lance successivement la première pièce, la deuxième pièce, etc. jusqu'à la m-ième pièce, cette expérience étant modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour tout k de $[\![1, m]\!]$, on note S_k la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus à l'issue des k premiers lancers.

1. a) Montrer que pour tout k de $[\![1, m]\!]$, les $k+1$ premiers éléments de la première ligne du produit matriciel $R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_k$ représentent la loi de S_k.

b) Montrer la relation suivante : $\left\|\displaystyle\prod_{i=1}^{m} R_i - \prod_{i=1}^{m}\exp(Q_i)\right\| = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left|P([S_m = k]) - e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right|$.

c) En déduire l'inégalité suivante : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left|P([S_m = k]) - e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right| \leqslant 2\sum_{i=1}^{m} p_i^2$.

2. Dans un programme Pascal sont faites les déclarations suivantes :

```
const m =... ;
Type tab = array[1..m] of real ;
Var prob : tab ;
```

On suppose que `prob` contient les probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_m$ (ainsi `prob[1]` contient p_1 etc.)

Écrire une fonction Pascal dont l'en-tête est `Sm(prob : tab) : integer` qui simule la variable aléatoire S_m.