



ÉCOLE DE HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES DU NORD  
EDHEC GRADUATE SCHOOL OF MANAGEMENT

**ÉCOLE DE HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES DU NORD**

**Concours d'admission sur classes préparatoires**

**MATHÉMATIQUES**

**Option économique**

**Vendredi 7 mai 1999, de 8h à 12h**

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.***

**EXERCICE 1**

Soit  $a$  un réel positif ou nul. On considère la matrice  $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a-2 & a & 1 \\ a & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1) Montrer que  $A(0)$  admet 1 et  $-1$  comme seules valeurs propres.

Donner les sous-espaces propres correspondants.

Dans toute la suite, on suppose  $a > 0$ .

2) Montrer que les valeurs propres de  $A(a)$  sont les réels  $\lambda$  solutions de l'une des équations :

$$\lambda^2 = (a-1)^2 \quad \text{et} \quad \lambda^2 + a\lambda + 1 = 0.$$

3) a. Déduire de la question précédente la valeur de  $a$  pour laquelle  $A(a)$  n'est pas inversible.

b. Pour cette valeur, dire si  $A(a)$  est diagonalisable.

4) On suppose dans cette question que  $a > 2$ .

a. Montrer que  $A(a)$  possède 4 valeurs propres distinctes deux à deux.

b. En déduire que  $A(a)$  est diagonalisable.

## EXERCICE 2

Pour tout réel  $a$ , on considère la fonction  $f_a$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f_a(x, y) = (1 + y + xy + ax^2) e^y.$$

### Partie 1 : étude des extrema de $f_a$

Dans cette partie, on suppose  $a \neq 0$  et  $a \neq -\frac{1}{2}$ .

- 1) a. Calculer les dérivées partielles premières de  $f_a$ .  
b. En déduire que  $f_a$  possède deux points critiques (c'est-à-dire deux couples de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  en lesquels  $f_a$  est susceptible de présenter un extremum local) et donner leurs coordonnées.
- 2) Calculer les dérivées partielles secondes de  $f_a$ .
- 3) a. Examiner, pour chacun des deux points critiques, à quelle condition portant sur  $a$ ,  $f_a$  présente en ces points un extremum local.  
b. Déterminer, en distinguant trois cas, si  $f_a$  présente sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  un maximum local ou un minimum local et donner sa valeur en fonction de  $a$ .

### Partie 2 : étude d'une fonction définie à l'aide de $f_a$

- 1) a. Pour tout réel  $x$  et pour tout réel  $t$  inférieur à  $x$ , calculer  $\int_t^x e^y dy$ .

En déduire que l'intégrale  $I = \int_{-\infty}^x e^y dy$  converge et donner sa valeur.

- b. Pour tout réel  $x$ , montrer grâce à une intégration par parties, que l'intégrale  $J = \int_{-\infty}^x y e^y dy$  converge et donner sa valeur.
- 2) a. Déduire des deux questions précédentes que l'on définit bien une fonction  $F_a$ , de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , en posant :  $F_a(x) = \int_{-\infty}^x f_a(x, y) dy$ .  
b. Après avoir écrit  $F_a(x)$  en fonction de  $a$  et de  $x$ , donner le tableau de variation de  $F_a$ . (on distinguera les trois cas :  $a = -1$ ,  $a < -1$  et  $a > -1$ )

## EXERCICE 3

Soient  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . On suppose que  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  suivent toutes les trois la loi  $\mathcal{U}_{[1, n]}$

(c'est-à-dire que :  $\forall k \in [1, n]$ ,  $P(X = k) = P(Y = k) = P(Z = k) = \frac{1}{n}$ ).

- 1) a. Montrer que :  $\forall k \in [2, n + 1]$ ,  $P(X + Y = k) = \frac{k - 1}{n^2}$ .  
b. Montrer que :  $\forall k \in [n + 2, 2n]$ ,  $P(X + Y = k) = \frac{2n - k + 1}{n^2}$ .

2) Utiliser la formule des probabilités totales pour déduire de la première question que :

$$P(X + Y = Z) = \frac{n-1}{2n^2}.$$

3) a. Montrer que la variable aléatoire  $T = n+1 - Z$  suit la loi  $\mathcal{U}_{[1, n]}$ .

b. Pourquoi  $T$  est-elle indépendante de  $X$  et de  $Y$  ?

c. En faisant intervenir la variable  $T$  et en utilisant la deuxième question, déterminer la probabilité  $P(X + Y + Z = n+1)$ .

## PROBLÈME

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

### Partie 1

On pose, pour tout  $n$  élément de  $\mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$ .

1) a. Montrer que :  $\forall p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{p+1}$ .

b. En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n \leq 1 + \ln(n)$ .

2) On considère la fonction  $\varphi_1$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par : 
$$\begin{cases} \varphi_1(0) = 0 \\ \varphi_1(x) = x(1 + \ln x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Montrer que  $\varphi_1$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

3) Pour tout réel  $x$  positif et pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose :

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_0^x \varphi_n(t) dt \quad (\text{on rappelle que } \varphi_1 \text{ a été définie à la question 2}).$$

a. Montrer que, pour tout  $n$  élément de  $\mathbb{N}^*$ , la fonction  $\varphi_n$  est parfaitement définie et continue sur  $\mathbb{R}_+$ . Que vaut  $\varphi_n(0)$  ?

b. Vérifier qu'il existe deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \varphi_n(x) = x^n (a_n + b_n \ln x).$$

$$\text{On montrera que : } \forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} - \frac{b_n}{(n+1)^2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{b_n}{n+1}$$

4) Écrire un programme en Turbo Pascal qui calcule et affiche les  $n$  premiers termes de chacune des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  pour une valeur de  $n$  entrée par l'utilisateur.

5) Calculer  $b_n$ .

6) Pour tout  $n$  élément de  $\mathbb{N}^*$ , on pose :  $c_n = n! a_n$ .

a. Montrer que  $c_n = 2 - u_n$ .

b. En déduire que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2 :  $|c_n| \leq 1 + \ln(n)$ .

c. Conclure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

d. Montrer enfin que la série de terme général  $a_n$  est absolument convergente.

## Partie 2

On considère les fonctions  $e_1, e_2, e_3$  et  $e_4$  définies par :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, e_1(x) = x, e_2(x) = x^2, e_3(x) = x \ln(x)$  et  $e_4(x) = x^2 \ln(x)$ .

On note  $E$  l'espace vectoriel engendré par  $e_1, e_2, e_3$  et  $e_4$ .

1) On suppose dans cette question que  $a, b, c$  et  $d$  sont 4 réels tels que :

(\*)  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, ax + bx^2 + cx \ln(x) + dx^2 \ln(x) = 0$ .

a. Montrer que  $a + b = 0$ .

b. Établir que :  $\forall x > 1, \frac{a}{x \ln(x)} + \frac{b}{\ln(x)} + \frac{c}{x} + d = 0$ . En déduire que  $d = 0$ .

c. Établir ensuite que :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{a}{x} + b + c \frac{\ln(x)}{x} = 0$ . En déduire que  $b = 0$ .

d. Montrer finalement que  $a = b = c = d = 0$ .

2) a. Déduire de la question précédente que  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  est une famille libre.

b. Montrer que  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  est une base de  $E$ .

3) On note  $u$  l'application qui à toute fonction  $f$  de  $E$  associe la fonction  $g = u(f)$  définie par :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = x f'(x)$ .

a. Montrer que  $u$  est une application linéaire.

b. Déterminer  $u(e_1), u(e_2), u(e_3)$  et  $u(e_4)$ .

c. En déduire que  $u$  est un endomorphisme de  $E$ .

4) a. Donner la matrice  $A$  de  $u$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ .

b. Montrer que  $u$  est un automorphisme de  $E$ .