6) Étude du cas général.
On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis de $\mathbb{R}^n$, montrer que f_n admet un minimum global sur U, égal à n^2.

Exercice 2

On se place dans un espace euclidien E de dimension n, où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Le produit scalaire des vecteurs x et y de E est noté (x / y) et la norme de x est notée $\| x \|$.
On désigne par Id l'endomorphisme identique de E.
On considère un vecteur u de E dont la norme est égale à 1, un réel λ non nul et on note f_λ l'application qui, à tout vecteur x de E associe $f_\lambda(x) = \lambda\, (x / u)\, u + x$.

1) Donner la dimension de $(\text{vect}(u))^\perp$.

2) Montrer que f_λ est un endomorphisme de E.

3) Montrer que le polynôme $X^2 - (\lambda+2)X + (\lambda+1)$ est un polynôme annulateur de f_λ.

4) a) Montrer que f_λ est un endomorphisme symétrique de E.
   b) Déterminer $f_\lambda(u)$ et $f_\lambda(v)$ pour tout vecteur v de $(\text{vect}(u))^\perp$.
   c) Établir alors que f_λ possède deux valeurs propres distinctes et donner les sous-espaces propres associés à ces deux valeurs propres.

5) Dans cette question on suppose que $\lambda = -1$.
   a) Vérifier que f_{-1} est un projecteur.
   b) Montrer plus précisément que f_{-1} est le projecteur orthogonal sur $(\text{vect}(u))^\perp$.

Exercice 3

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif.
On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes deux la loi uniforme sur $[0, a[$.
On pose $Z = |X - Y|$ et on admet que $-Y$, $X - Y$ et Z sont des variables aléatoires à densité, elles aussi définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1) a) Déterminer une densité de $-Y$.
   b) En déduire que la variable aléatoire $X - Y$ admet pour densité la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{a - |x|}{a^2} & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On note G la fonction de répartition de $X - Y$.

2) a) Exprimer la fonction de répartition H de la variable aléatoire Z en fonction de G.
   b) En déduire qu'une densité de Z est la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{2(a - x)}{a^2} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

3) Montrer que Z possède une espérance et une variance et les déterminer.

4) Simulation informatique.
On rappelle qu'en Turbo Pascal, la fonction random permet de simuler la loi uniforme sur [0, 1[.
Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle retourne à chaque appel un nombre réel choisi selon la loi de Z.

```
Function z (a : real) : real ;
Var   x, y : real ;
Begin
x : = ------ ; y : = ------ ; z : = ------ ;
End ;
```

Problème

Préliminaire : un résultat utile pour la partie 2.

1) a) Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_1^n \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

2) Montrer enfin que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2\sqrt{n} - 2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

Partie 1 : convergence complète.

1) Soit une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire X, elle aussi définie sur cet espace probabilisé.
On suppose que la suite (X_n) converge complètement vers X, c'est-à-dire que, pour tout réel ε strictement positif, la série de terme général $P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$ est convergente.
Montrer que la suite (X_n) converge en probabilité vers X.

2) On se propose dans cette question d'étudier un exemple montrant que la réciproque de cette propriété est fausse.
Pour ce faire, on considère une suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\dfrac{1}{n}$

a) Déterminer la probabilité $P(Y_n \geq 1)$.

b) Soit ε un réel strictement positif. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0,\ 0 \leq P(Y_n \geq \varepsilon) \leq 1 - e^{-\frac{1}{n}}$.

c) En déduire que la suite (Y_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire nulle.

d) Utiliser la valeur de $P(Y_n \geq 1)$ pour en déduire que la suite (Y_n) ne converge pas complètement vers la variable aléatoire certaine nulle.

Partie 2 : étude d'un exemple.

Dans cette partie, on considère une suite $(B_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et telles que, pour tout entier naturel k non nul, B_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$. On suppose que les variables aléatoires B_k sont deux à deux indépendantes.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} B_k$ et $Z_n = \dfrac{S_n}{E(S_n)}$ et on admet que les variables aléatoires S_n et Z_n sont, elles aussi, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On se propose, dans les questions 1) et 2), de montrer que la suite (Z_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à 1 et, dans les questions suivantes, de montrer que la suite (Z_n) converge complètement vers cette même variable.

1) a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, donner sous forme de sommes les expressions de $E(S_n)$ et $V(S_n)$.
   b) Vérifier que $V(S_n) \leq E(S_n)$.

2) a) Montrer que $P(\,|Z_n - 1| \geq \varepsilon\,) \leq \dfrac{1}{\varepsilon^2 E(S_n)}$.
   b) Établir que la suite (Z_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à 1.

3) À l'aide de l'inégalité établie à la question 2a) de cette même partie, montrer que la série de terme général $P(\,|\,Z_{n^4} - 1\,| \geq \varepsilon\,)$ est convergente.

4) On désigne par e_n la partie entière de $n^{\frac{1}{4}}$, et on a donc : $e_n^4 \leq n < (e_n + 1)^4$.
   a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{S_{e_n^4}}{E(S_{(e_n+1)^4})} \leq Z_n \leq \dfrac{S_{(e_n+1)^4}}{E(S_{e_n^4})}$.
   b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})} Z_{e_n^4} \leq Z_n \leq \dfrac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} Z_{(e_n+1)^4}$.

5) a) Établir que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} = 1$.
   b) En déduire que, pour tout réel ε strictement positif et pour n assez grand, on a :
$$\frac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} \leq 1 + \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})} \geq \frac{2+\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}.$$
   c) Montrer que, pour tout réel ε strictement positif et pour n assez grand, on a :
   $(Z_n \leq 1 - \varepsilon) \subset (\,Z_{e_n^4} - 1 \leq -\varepsilon^2\,)$ et $(Z_n \geq 1 + \varepsilon) \subset (\,Z_{(e_n+1)^4} - 1 \geq \dfrac{\varepsilon}{2}\,)$.
   d) En déduire alors que, pour tout réel ε strictement positif et pour n assez grand, on a :
$$P(\,|\,Z_n - 1\,| \geq \varepsilon\,) \leq P(\,|\,Z_{(e_n+1)^4} - 1\,| \geq \frac{\varepsilon}{2}\,) + P(\,|\,Z_{e_n^4} - 1\,| \geq \varepsilon^2\,).$$

   e) Conclure qu'effectivement, la suite (Z_n) converge complètement vers la variable aléatoire certaine égale à 1.