dans l'urne et on dit qu'une paire est reconstituée.

• si les deux boules portent des numéros différents, on les remet dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

Pour tout élément i de $[\![1,n]\!]$, et tout entier naturel k non nul, on pose $T_i = k$ si k tirages exactement ont été nécessaires pour reconstituer i paires.

On admet qu'il existe un espace probablisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ permettant de modéliser cette expérience et que, pour tout entier i de $[\![1,n]\!]$, T_i est une variable aléatoire définie sur cet espace.

1. (a) Déterminer la loi de T_1 et reconnaître cette loi.

   (b) Donner, sans calcul la valeur de l'espérance de T_1.

2. Compléter la partie principale du programme suivant afin qu'il affiche une réalisation de la variable T_1 :

```
begin
randomize; readln(n) ;t := 0;
repeat a := random(n)+1 ;b := random(n)+1;
t := t+1;
until...... ;
writeln(t);
end.
```

3. On pose $X_1 = T_1$ et pour tout i de $[\![2,n]\!]$, $X_i = T_i - T_{i-1}$.

   (a) Que représente la variable X_i ?

   (b) Déterminer, pour tout i de $[\![1,n]\!]$ la loi de X_i ainsi que son espérance.

   (c) En déduire que T_n admet une espérance mathématique et que l'on a $\mathbb{E}(T_n) = n^2$.

4. On effectue une suite de n tirages de deux boules selon le protocole précédent.
   On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de paires reconstituées lors de ces n tirages.

   (a) Calculer $\mathbb{P}([S_n = 0])$.

   (b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}([S_n = 0])$.

   (c) Montrer que $\mathbb{P}([S_n = n]) = \dfrac{n!2^n}{(2n)!}$.

5. Expliquer ce que fait la partie principale du programme suivant :

```
begin
randomize; readln(n) ;m := n ;z := 0;
for k := 1 to n do
begin
a := random(m)+1 ;b := random(m)+1;
if a=b then begin z := z+1; m := m-1 ;end;
end;
writeln(z);
end.
```

Exercice 3

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n.

1. Montrer que, pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ est convergente.

On admet que l'application, notée $\langle .,. \rangle$ de $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ à valeur dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X], \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$$

est un produit scalaire. On note $\| \ \|$ la norme associée.

2. (a) Soit P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, P' et Q' leurs polynômes dérivés respectifs. Établir la relation suivante :
$$\langle P', Q\rangle + \langle P, Q'\rangle = \langle P, Q\rangle - P(0)Q(0).$$
   (b) En déduire que si P est un polynôme non constant de $\mathbb{R}_n[X]$, orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur , alors on a $|P(0)| = \|P\|$.

3. On se propose de démontrer dans cette question qu'il existe une unique famille de polynômes $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ vérifiant :
$$(\mathcal{R})\begin{cases} L_0 = 1 \\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ d^\circ(L_k) = k \\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ L_k(0) = 1 \\ (L_0, L_1, \dots, L_n) \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}_n[X] \end{cases}$$
   (a) On suppose qu'il existe deux familles de polynômes $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ et $(M_0, M_1, \dots, M_n)$ vérifiant les relations $\mathcal{R}$.
   Montrer que, pour tout élément k de $[\![0, n]\!]$, $L_k = M_k$.
   (b) On note $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ la famille obtenue (à partir de la base canonique $(1, X, ..., X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$) par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
      i. Justifier, pour tout k de $[\![0, n]\!]$, la relation $P_k(0) \neq 0$.
      ii. En déduire une famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ vérifiant $\mathcal{R}$.
   (c) Conclure et calculer explicitement L_1 et L_2.

Problème

Toutes les variables aléatoires intervenant dans ce problème sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On considère aussi, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire M_n, définie par : $M_n = \sup(X_1, X_2, \dots X_n)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω, on a $M_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$.
On cherche alors des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes strictement positifs, telles que la suite $\left(\dfrac{M_n - b_n}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire non constante.
La fonction exponentielle sera indifféremment notée $(x \to e^x)$ ou exp.

Partie 1 - La loi exponentielle

On suppose dans cette partie que la loi commune des X_k est la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.

1. Soit g la fonction définie que $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^{-x}\exp\left(-e^{-x}\right)$.
   (a) Montrer que g est une densité de probabilité. On note G une variable aléatoire admettant g comme densité.
   (b) Déterminer la fonction de répartition, notée F_G, de la variable G.
2. (a) Donner, pour tout entier naturel n non nul, la fonction de répartition de la variable M_n.
   (b) Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $U_n = \lambda M_n - \ln(n)$. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable dont on précisera la loi.

Partie 2 - La loi normale

On suppose dans cette partie que la loi commune des X_k est une loi normale centrée réduite. Soit φ la densité de X_1.

1. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du$ est convergente et à l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$\mathbb{P}(X_1 > x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du.$$

(b) En déduire que pour tout $x > 0$,

$$\frac{\varphi(x)}{x} - \frac{\mathbb{P}(X_1 > x)}{x^2} \leq \mathbb{P}(X_1 > x) \leq \frac{\varphi(x)}{x}$$

puis que

$$\mathbb{P}(X_1 > x) \leq \frac{\varphi(x)}{x} \leq \mathbb{P}(X_1 > x)(1 + \frac{1}{x^2}).$$

2. Soit c un réel strictement positif. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, l'équation $\frac{\phi(x)}{x} = \frac{c}{n}$ admet sur $]0, +\infty[$ une unique solution que l'on notera x_n.
3. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.
4. Montrer que pour tout entier n non nul,

$$x_n^2 + 2\ln x_n = 2\ln n - \ln(2c^2\pi).$$

5. En prenant un équivalent de chaque membre de l'équation de la question 4., montrer que

$$x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\ln n}.$$

En déduire que l'on peut écrire pour $n \geq 2$,

$$x_n = \sqrt{2\ln n} + \varepsilon_1(n) \text{ où } \lim_{n \to +\infty} \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln n}} = 0.$$

6. (a) En utilisant la question 4., montrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$2(\sqrt{2\ln n})\varepsilon_1(n) + (\varepsilon_1(n))^2 + 2\ln(1 + \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln n}}) = -\ln(\ln n) - \ln(4\pi c^2).$$

(b) En prenant un équivalent de chaque membre de l'équation du a), montrer que

$$2\varepsilon_1(n)\sqrt{2\ln n} \underset{n \to +\infty}{\sim} -\ln(\ln n).$$

En déduire que

$$\varepsilon_1(n) = -\frac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\ln n}} + \varepsilon_2(n) \text{ où } \lim_{n \to +\infty} \varepsilon_2(n)(\frac{2\sqrt{2\ln n}}{\ln(\ln n)}) = 0.$$

On admet alors qu'en poursuivant le développement asymptotique, que l'on peut écrire pour tout entier n supérieur à 2 :

$$x_n = \sqrt{2\ln n} - \frac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\ln n}} - \frac{\ln(4\pi)}{2\sqrt{2\ln n}} - \frac{\ln c}{\sqrt{2\ln n}} + \varepsilon(n)$$

$$\textit{avec } \lim_{n \to +\infty} \varepsilon(n)\sqrt{2ln(n)} = 0.$$

7. On pose pour $n \geq 2$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{2\ln n}}$ et $b_n = \sqrt{2\ln n} - \frac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\ln n}} - \frac{\ln(4\pi)}{2\sqrt{2\ln n}}$.
Montrer à l'aide des questions précédentes, que pour tout x réel, et pour tout entier $n \geq 2$, en posant $c = e^{-x}$ que :

(a)

$$a_n x + b_n = x_n - \varepsilon(n)$$

(b)

$$\frac{\phi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{n}.$$

(c) En déduire , en utilisant la question 1.b. que $\frac{\phi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \mathbb{P}(X_1 > a_n x + b_n)$ puis que la suite $(\frac{M_n - b_n}{a_n})_{n \geq 1}$ converge en loi vers la variable G (la variable G est définie dans la partie 1.)