On se propose, dans la suite, d'étudier un exemple montrant que la réciproque de cette propriété est fausse.

Pour ce faire, on considère une suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes la loi de Poisson de paramètre λ (avec $\lambda > 1$).

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $Y_n = \prod_{k=1}^{n} Z_k$.

2) a) Pour tout entier naturel n non nul, déterminer $P(Y_n \neq 0)$.

b) Soit ε un réel strictement positif. Comparer les événements $(Y_n > \varepsilon)$ et $(Y_n \neq 0)$.

c) En déduire que la suite (Y_n) converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.

3) a) Montrer que, si la suite (Y_n) convergeait en moyenne vers une variable aléatoire Y, alors on aurait $P(Y = 0) = 1$.

b) Calculer l'espérance de Y_n.

c) Établir que $E(\,|Y_n - Y|\,) \geq E(Y_n) - E(Y)$, puis déterminer $\lim_{n\to+\infty} E(|Y_n - Y|)$.

4) Conclure.

Exercice 2

On désigne par α un entier strictement supérieur à 1 et on pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}.$$

Dans la suite de l'exercice, on écrira u_n au lieu de $u_n(\alpha)$.

1) a) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le réel u_n est bien défini et que $u_n > 0$.

b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ et en conclure qu'elle converge.

2) a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n\alpha(u_n - u_{n+1})$.

b) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \frac{1}{k\alpha})$.

3) Montrer, en considérant $\ln(u_n)$, que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n\alpha}{\alpha - 1} u_{n+1}$.

b) En déduire que : $\forall n \geq 2$, $\ln(S_n) = \ln(u_1) + \sum_{k=2}^{n} \left[\ln(1 - \frac{1}{k\alpha}) - \ln(1 - \frac{1}{k}) \right]$.

c) À l'aide d'un développement limité d'ordre 1 en $\frac{1}{k}$, donner un équivalent, lorsque k est au voisinage de $+\infty$, de $\ln(1 - \frac{1}{k\alpha}) - \ln(1 - \frac{1}{k})$.

d) Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n.

5) Dans cette question, on suppose que $\alpha = 2$.

Compléter la déclaration de fonction récursive, ci-dessous écrite en Pascal, afin qu'elle retourne la valeur de u_n :

```
Function u(n : integer) : real ;
Begin
If (n = 1)   then  u : = ------
                   else  u : = ------ ;
end ;
```

Exercice 3

On note E l'espace vectoriel constitué des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à $2n+1$.

Pour tout k de $\{0, 1, \ldots, 2n+1\}$, on admet que l'expression $X^{2n+1}\times\dfrac{1}{X^k}$ désigne le polynôme X^{2n+1-k}.

On désigne par Id l'endomorphisme identique de E et on note f l'application qui à toute fonction P de E associe la fonction $f(P)$ définie par : $f(P) = X^{2n+1}P(\dfrac{1}{X})$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de E.
2) a) Vérifier que $f\,o f = Id$.
 b) En déduire les deux valeurs propres possibles de f.
3) Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$ un polynôme quelconque de $\mathrm{Ker}(f-Id)$.
 a) Montrer que les a_k $(0 \le k \le 2n+1)$ sont solutions du système : $\forall k\in\{0, 1, \ldots, n\}$, $a_k = a_{2n+1-k}$.
 b) En déduire une base de $\mathrm{Ker}(f-Id)$.
4) Déterminer de la même façon une base de $\mathrm{Ker}(f+Id)$.
5) On considère l'application φ de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout couple (P,Q) de polynômes de E associe le réel $\varphi(P,Q) = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} a_k b_k$, où l'on a noté $P = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$ et $Q = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} b_k X^k$.
 a) Montrer que φ est un produit scalaire défini sur E.
 b) Établir alors que f est un endomorphisme symétrique
 c) En déduire que $\mathrm{Ker}(f+Id)$ et $\mathrm{Ker}(f-Id)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Problème

Partie 1 : préliminaire

Dans cette partie, x désigne un réel élément de $[0,1[$.

1) a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0,x]$, simplifier la somme $\sum\limits_{p=1}^{n} t^{p-1}$.
 b) En déduire que : $\sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$.
 c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0$.
 d) Établir alors que la série de terme général $\dfrac{x^p}{p}$ est convergente et que $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$.
2) a) Après avoir vérifié que, pour tout entier naturel n non nul, on a $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, montrer que la série de terme général $\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ est convergente.
 b) Utiliser la première question pour établir que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x)\ln(1-x)$.

Partie 2

On considère une variable aléatoire X de densité f, nulle sur $]-\infty, 0[$, continue sur $[0, +\infty[$ et strictement positive sur $[0, +\infty[$. On note alors F la fonction de répartition de X.

1) Justifier que, pour tout réel x, on a : $1-F(x) > 0$.
On définit alors la fonction g par :

$$g(x) = \begin{cases} -f(x)\ln(1-F(x)) \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}.$$

2) Montrer que g peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire Y.
3) Étude d'un cas particulier.
 a) Montrer qu'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle vérifie les conditions imposées dans cette partie.
 b) On suppose ici que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Reconnaître alors la loi de Y puis donner son espérance et sa variance.

Partie 3

Dans cette partie, on considère une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, ayant toutes la même loi que X (c'est-à-dire de densité f, nulle sur $]-\infty, 0[$, continue sur $[0, +\infty[$, strictement positive sur $[0, +\infty[$, et de fonction de répartition notée F).

On se propose, à partir de cette suite, de construire une variable aléatoire Z ayant comme densité la fonction g, nulle sur $]-\infty, 0[$, et définie pour tout réel x positif par : $g(x) = -f(x)\ln(1-F(x))$.

Pour ce faire, on considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de nombre réels positifs, définie par $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

On considère dès lors une variable aléatoire N, définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendante des variables X_i, et dont la loi est donnée par : $\forall n\in\mathbb{N}^*, P(N=n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

On pose alors $Z = \mathrm{Sup}(X_0, X_1, \ldots, X_N)$, ce qui signifie que :
$\forall \omega \in\Omega, Z(\omega) = \mathrm{Max}(X_0(\omega), X_1(\omega), \ldots, X_{N(\omega)}(\omega))$.

2) a) Montrer que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et que sa fonction de répartition F_Z est donnée par :

$$\forall x\in\mathbb{R}, F_Z(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(F(x))^{n+1}}{n(n+1)}.$$

 b) Utiliser le préliminaire pour en déduire, à l'aide de la fonction F, une expression explicite de F_Z sur $[0, +\infty[$.
 c) Vérifier que Z est une variable aléatoire à densité et qu'elle admet bien la fonction g comme fonction densité.