

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD  
Concours d'admission sur classes préparatoires

**MATHEMATIQUES**  
Option scientifique

Mardi 15 mai 2001, de 8h à 12h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.***

**Exercice 1**

On rappelle que l'ensemble  $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  des fonctions numériques définies et de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ , muni des lois habituelles, possède une structure d'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

On note  $E$  l'ensemble des fonctions  $\varphi$  de  $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  qui vérifient la relation (\*) suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi''(x) = (1+x^2)\varphi(x).$$

1) Montrer que  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

2) Montrer que si  $u$  et  $v$  sont deux éléments de  $E$ , alors  $u'v - v'u$  est une fonction constante.

3) Soit  $f$  la fonction définie, pour tout réel  $x$ , par :  $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ .

a. Vérifier que  $f$  est élément de  $E$ .

b. Soit  $g$  la fonction définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) \int_0^x \frac{dt}{(f(t))^2}$ .

Montrer que  $g$  est élément de  $E$

4) a. Soit  $h$  une solution de (\*). Montrer, en utilisant le résultat de la deuxième question appliqué aux fonctions  $h$  et  $f$ , que  $h$  est combinaison linéaire de  $f$  et de  $g$ .

b. Montrer finalement que  $(f, g)$  est une base de  $E$ .

## Exercice 2

Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, on pose  $u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^2}$ .

On se propose de montrer que la série de terme général  $u_n$  converge et de calculer sa somme.

On pose, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1 :  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  et  $w_n = v_n - \ln(n)$ .

On rappelle que :  $v_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$

1) a. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n - w_{n+1} \geq 0$ .

b. Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de  $\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$ .

c. En déduire que, au voisinage de  $+\infty$  :  $w_n - w_{n+1} = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

2) a. Montrer que la série de terme général  $(w_n - w_{n+1})$  est convergente.

b. En déduire que la suite  $(w_n)$  converge. On note  $\gamma$  sa limite.

3) Montrer que la série de terme général  $u_n$  converge.

4) a. Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tels que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$ .

b. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} = v_{2n+1} - \frac{1}{2}v_n - 1$ .

c. En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n u_k = 24(v_n - v_{2n+1}) + 24 - \frac{6n}{n+1}$ .

5) En utilisant la convergence de la suite  $(w_n)$ , calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  en fonction de  $\ln 2$ .

## Exercice 3

On considère l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , muni du produit scalaire noté  $(./.)$  défini par :

$$\forall u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \forall u' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3, (u / u') = xx' + yy' + zz'$$

La norme du vecteur  $u$  est alors définie par  $\|u\| = \sqrt{(u / u)}$ .

On note  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et on rappelle que  $\mathcal{B}$  est orthonormale pour le produit scalaire défini ci-dessus.

On désigne par  $a, b$  et  $c$  trois réels, on pose  $\omega = (a, b, c)$  et on suppose que  $c$  est non nul.

On note  $\varphi$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  qui à tout vecteur  $u = (x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  associe le vecteur

$$\varphi(u) = (yc - zb, za - xc, xb - ya).$$

- 1) Écrire la matrice  $M$  de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
- 2) a. Vérifier que  $\omega$  appartient à  $\text{Ker } \varphi$ .  
 b. Montrer que  $(\varphi(e_1), \varphi(e_2))$  est une famille libre.  
 c. Dédire des questions précédentes que  $\text{Ker } \varphi = \text{vect}(\omega)$ .
- 3) a. Montrer que pour tout vecteur  $u$  de  $\mathbb{R}^3$ ,  $(\varphi(u) / \omega) = 0$ .  
 b. En déduire que :  $\text{Im } \varphi = (\text{Ker } \varphi)^\perp$ .
- 4) a. Justifier que pour tout vecteur  $u$  de  $\mathbb{R}^3$ , il existe un unique couple  $(u_1, u_2)$  élément de  $\text{Ker } \varphi \times \text{Im } \varphi$  tel que  $u = u_1 + u_2$ .  
 b. Montrer que  $(u / \omega) = (u_1 / \omega)$ .  
 c. En déduire que  $u_1 = \frac{(u / \omega)}{\|\omega\|^2} \omega$ , puis déterminer  $u_2$  en fonction de  $u$  et  $\omega$ .
- 5) a. Montrer que  $M^3 = -\|\omega\|^2 M$ .  
 b. En déduire que :  $\forall v \in \text{Im } \varphi, \varphi \circ \varphi(v) = -\|\omega\|^2 v$ .  
 c. Montrer finalement que :  $\forall u \in \mathbb{R}^3, \varphi \circ \varphi(u) = -\|\omega\|^2 u + (u / \omega) \omega$ .

## Problème

On désigne par  $n$  et  $r$  deux entiers naturels vérifiant :  $n \geq 2$  et  $r \geq 3$ .

On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à  $r$  résultats différents  $R_1, R_2, \dots, R_r$  de probabilités respectives  $x_1, x_2, \dots, x_r$ . On admet que, pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $0 < x_i < 1$ .

On effectue  $n$  épreuves indépendantes du type de celle décrite ci-dessus.

Pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, r \rrbracket$ , on note  $X_i$  la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat numéro  $i$  n'est pas obtenu à l'issue de ces  $n$  épreuves et qui vaut 0 sinon.

On désigne par  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des  $n$  épreuves.

- 1) a. Exprimer la variable  $X$  en fonction des variables  $X_1, X_2, \dots, X_r$ .  
 b. Donner la loi de  $X_i$  pour tout  $i$  de  $\{1, 2, \dots, r\}$ .  
 c. En déduire que l'espérance de  $X$  est  $E(X) = \sum_{i=1}^r (1 - x_i)^n$ .

La suite de cet exercice consiste à rechercher les valeurs des réels  $x_i$  en lesquelles  $E(X)$  admet un minimum local.

- 2) a. Donner la valeur de  $x_1 + x_2 + \dots + x_r$  puis écrire  $E(X)$  comme une fonction, que l'on notera  $f$ , des  $(r-1)$  variables  $x_1, \dots, x_{r-1}$ .  
 La fonction  $f$  est donc définie sur l'ouvert  $]0, 1[)^{r-1}$  de  $\mathbb{R}^{r-1}$ .  
 b. Montrer que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $]0, 1[)^{r-1}$ .

- 3) a. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de  $f$ .  
 b. Montrer que le seul point de  $\mathbb{R}^{r-1}$  en lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de  $f$  s'annulent simultanément est le point  $R = \left(\frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \dots, \frac{1}{r}\right)$ .
- 4) Déterminer la matrice  $M$ , élément de  $\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})$ , dont l'élément situé à l'intersection de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  est  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(R)$ .
- 5) On pose  $A = I + J$ , où  $I$  est la matrice unité de  $\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})$  et  $J$  la matrice de  $\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})$  dont tous les éléments sont égaux à 1.  
 a. Montrer que  $J$  est diagonalisable.  
 b. Exprimer  $J^2$  en fonction de  $J$  et  $r$ . En déduire que les valeurs propres de  $J$  sont 0 et  $r-1$ .  
 c. Montrer que le sous-espace propre de  $J$  associé à la valeur propre  $r-1$  est de dimension 1.  
 d. Utiliser une base de  $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$  formée de vecteurs propres de  $J$  pour montrer que  $A$  est diagonalisable et qu'il existe une matrice  $P$  d'inverse  ${}^tP$ , telle que  $A = PD{}^tP$  où  $D$  est la matrice de  $\mathcal{M}_{r-1}(\mathbb{R})$  dont les  $(r-2)$  premiers éléments diagonaux sont égaux à 1, celui de la  $(r-1)^{\text{ème}}$  ligne étant égal à  $r$ .
- 6) a. Déduire des questions précédentes que pour tout  $H$  non nul de  $\mathcal{M}_{r-1,1}(\mathbb{R})$ ,  ${}^tHMH > 0$ .  
 b. En posant  ${}^tH = (h_1, h_2, \dots, h_{r-1})$ , exprimer  ${}^tHMH$  en fonction des réels  $h_i$  et des dérivées partielles d'ordre 2 de  $f$  au point  $R$ .  
 c. En déduire que  $f$  présente un minimum local au point  $R$ .  
 d. Donner la valeur de  $E(X)$  correspondant à ce minimum.