ECRICOME
VISER PLUS HAUT

CONCOURS D'ADMISSION 2013

1

Mathématiques

Option Scientifique

Mercredi 17 avril 2013 de 8h00 à 12h00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps" :
8h00 – 13h20

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 7 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Tournez la page s.v.p.

EXERCICE 1

On note :

- $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes (à n lignes) à coefficients réels ;
- $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels ;
- ${}^tU$ la transposée d'une matrice U ;
- $\ker(M) = \{X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } MX = 0\}$ et $\operatorname{Im}(M) = \{MX, \quad X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$ où M est une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $\langle X, Y\rangle = {}^tXY$ et on note $\|\|$ sa norme associée.
On considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et un entier naturel k non nul tels que $A^k = {}^tA$. On pose alors $B = {}^tAA \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer ${}^tB$ et établir que : $\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle BX, X\rangle = \|AX\|^2$.
2. Démontrer que toutes les valeurs propres de B sont réelles et positives.
3. Prouver que : $B^k = B$. Quelles sont les valeurs propres possibles de B ?
4. Justifier que : $B^2 = B$.
5. Montrer que : $\ker(B) = \ker(A)$ puis que : $\operatorname{Im}(B) = \operatorname{Im}(A)$.
6. Etablir que : $\forall X \in \operatorname{Im}(A), \quad \|AX\| = \|X\|$.

EXERCICE 2

On considère :

- la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \frac{1}{5}\left[x^2\left(1-x^2\right) + y^2\left(1-y^2\right) + 2xy\right] ;$$

- la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}) \quad \text{avec} \quad (u_0, u_1) \in [0,1]^2.$$

1. Etude de f.

   (a) Si (a,b) un point critique de f, justifier que $a = b$ puis déterminer tous les points critiques de f ainsi que la valeur de f en chacun de ses points critiques.

   On admettra dans toute la suite que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \leqslant \frac{2}{5}\left(x^2+y^2\right) - \frac{1}{10}\left(x^2+y^2\right)^2.$$

   (b) Préciser le ou les extrémums de la fonction $g : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \dfrac{2t}{5} - \dfrac{t^2}{10}$.

   (c) Démontrer que la fonction f possède un maximum et qu'elle n'est pas minorée.

2. Programmation de $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Ecrire un programme en PASCAL demandant à l'utilisateur un entier N ainsi que les valeurs initiales u_0, u_1 et calculant la valeur de u_N correspondante.

3. Etude de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$. On considère la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{2}{5}(a_n + a_{n+1}) \quad \text{avec} \quad a_0 = u_0 \text{ et } a_1 = u_1.$$

   (a) Démontrer que : $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} \leqslant \dfrac{2}{5}(u_n + u_{n+1})$.

   (b) Justifier que : $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \leqslant a_n$.

   (c) Etablir l'existence de quatre réels λ, μ, r, s tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda r^n + \mu s^n$$

   puis étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

ECRICOME
VISER PLUS HAUT

PROBLEME

Soit x un réel, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie réelle de x c'est-à-dire l'unique entier N tel que : $N \leqslant x < N+1$.
Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. On définit X_d sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X_d(\omega) = \lfloor X(\omega) \rfloor.$$

On admet que X_d est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, on l'appelle « la discrétisée de X »
Le problème consiste :

- à étudier quelques propriétés de la discrétisée de variables suivant quelques lois usuelles **(PARTIE I)**
- puis à étudier plus spécifiquement le cas où les variables possèdent une densité définie par un polynôme **(PARTIE II)**
- et enfin à établir qu'une variable discrète, satisfaisant à certaines conditions, est la variable discrétisée d'une variable à densité **(PARTIE III).**

Les parties **I, II** et **III** sont largement indépendantes.

PARTIE I : Calculs de discrétisées.

1. En PASCAL,

   - la commande **floor(x)** calcule la partie entière du réel x ;
   - la commande **random** crée aléatoirement un réel appartenant à l'intervalle $[0,1]$ (*qui suit en outre la loi uniforme sur* $[0,1]$) ;

   On rappelle que si Z suit la loi uniforme sur $[0,1]$ alors, pour $a \in \mathbb{R}_+$, aZ suit la loi uniforme sur $[0,a]$.

   Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,a]$ $(a \in \mathbb{R}_+)$ et X_d sa discrétisée.

   Ecrire une fonction PASCAL qui à un réel a (positif) fournit par l'utilisateur renvoie une réalisation de X_d.

2. Soit X une variable aléatoire possédant une densité f. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \mathrm{P}(X_d = k) = \int_k^{k+1} f(x)\, dx.$$

3. Soit N un entier naturel non nul et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, N]$.
Déterminer la loi de X_d (on précisera les valeurs prises par X_d).

4. Etablir que l'on définit bien une variable aléatoire discrète Y en posant :
$$\begin{cases} Y(\Omega) = \{1, 2, .., 9\} \text{ et } \forall k \in Y(\Omega), \\ \mathrm{P}(Y = k) = \dfrac{1}{\ln(10)} \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) \end{cases}$$
Proposer une densité f telle que si une variable aléatoire X possède f pour densité alors sa discrétisée X_d suit la loi de Y.

5. Soient X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et n un entier naturel non nul. On pose $Y_n = \dfrac{\lfloor nX \rfloor}{n}$.
   (a) Justifier que la variable nX possède une densité f_n que l'on précisera.
   (b) Donner la loi de la variable $\lfloor nX \rfloor$. Vérifier que $\lfloor nX \rfloor + 1$ suit une loi connue dont on donnera le nom et le paramètre.
   (c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$, prouver que :
$$\mathrm{P}(Y_n \leqslant x) = 1 - \exp\left(-\frac{\lambda(\lfloor nx \rfloor + 1)}{n}\right).$$
   (d) Donner un encadrement simple de $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ puis montrer que la suite $(Y_n)_{n \geqslant 0}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on précisera la loi.

PARTIE II : Discrétisées et lois « polynômiales ».

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients réels de degré au plus n et on pose :
$$\forall k \in \{0, .., n\}, \quad e_k : x \in \mathbb{R} \mapsto x^k.$$
Si Q appartient à $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $u(Q)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(Q)(x) = \int_x^{x+1} Q(t)\, dt.$$

1. Pour tout entier $k \in \{0, .., n\}$, calculer $u(e_k)$ puis exprimer $u(e_k)$ en fonction de $e_0, .., e_n$.

2. Etablir la linéarité de u et justifier que si $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $u(Q) \in \mathbb{R}_n[X]$.

3. Etablir que la famille $(u(e_k))_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Justifier que pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique polynôme $Q_R \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad R(x) = \int_x^{x+1} Q_R(t)\,dt.$$

5. En considérant $n = 1$, expliciter Q_R lorsque : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad R(x) = \dfrac{x}{6}$.

6. Soient N un entier naturel et X une variable aléatoire dont f est une densité.

   (a) On suppose qu'il existe un entier naturel n et un polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f(x) = Q(x) \text{ si } x \in [0, N+1[\ ; \\ f(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

   Etablir l'existence d'un polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que

   $$\begin{cases} X_d(\Omega) = \{0, \ldots, N\}, \\ \forall k \in X_d(\Omega), \quad \mathrm{P}(X_d = k) = R(k) \end{cases}.$$

   (b) On considère la variable aléatoire discrète Y définie par :

   $$\begin{cases} Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}, \\ \forall k \in Y(\Omega), \quad \mathrm{P}(Y = k) = \dfrac{k}{6} \end{cases}.$$

   Montrer qu'il n'existe aucun polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

   $$\forall x \in [0, 4[, \quad f(x) = Q(x)$$

   et tel que Y soit la discrétisée de X. **Indication** : *procéder par l'absurde et constater que l'une des propriétés des densités n'est pas satisfaite.*

ECRICOME
VISER PLUS HAUT

PARTIE III. Variables dénombrables et discrétisées.

On considère une variable aléatoire Y définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ ainsi qu'une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ qui soit de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ et telles que :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(Y = k) = g(k).$$

En particulier, la série $\sum_{k \geqslant 0} g(k)$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} g(k) = 1.$$

On suppose en outre que g est <u>décroissante</u> et qu'il existe un réel $C \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |g'(x)| \leqslant \frac{C}{(1+x)^2} \text{ et } |g''(x)| \leqslant \frac{C}{(1+x)^2}.$$

Pour tout réel x, on pose :

$$\begin{cases} f(x) = -\sum_{k=0}^{+\infty} g'(x+k) \text{ si } x \geqslant 0 \,; \\ f(x) = 0 \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Prouver la convergence de la série $\sum_{k \geqslant 0} g'(x+k)$. Quel est le signe de f ?

2. (a) Etablir que : $\forall (x, a) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad \forall k \in \mathbb{N},$

$$|g'(x+k) - g'(a+k)| \leqslant \frac{C|x-a|}{(k+1)^2}.$$

   (b) Prouver l'existence d'un réel $D \geqslant 0$ tel que :

$$\forall (x, a) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad |f(x) - f(a)| \leqslant D|x-a|.$$

   Justifier la continuité de f en tout réel $a \in \mathbb{R}_+$.

3. Soit t un réel positif, pour tout entier N, on pose :

$$S_N(t) = -\sum_{k=0}^{N} g'(t+k) \quad \text{et} \quad R_N(t) = -\sum_{k=N+1}^{+\infty} g'(t+k).$$

Tournez la page s.v.p.

(a) Démontrer que : $\forall k \geqslant 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$

$$\frac{1}{(t+k+1)^2} \leqslant \frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1}.$$

puis que :

$$\forall N \geqslant 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |R_N(t)| \leqslant \frac{C}{N+1}.$$

(b) Prouver que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 f(t)\,dt = g(0) - g(N+1) + \int_0^1 R_N(t)\,dt.$$

(c) Justifier que : $\lim_{k \to +\infty} g(k) = 0$ et que :

$$\int_0^1 f(t)\,dt = g(0).$$

4. (a) Vérifier que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t+1) - f(t) = g'(t)$$

puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt.$$

(b) Pour tout entier $N \geqslant 0$, on pose $S_N = \int_0^N f(t)\,dt$. Etablir que :

$$\forall N \geqslant 1, \quad S_N = \sum_{k=0}^{N-1} g(k)$$

puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad S_{\lfloor x \rfloor} \leqslant \int_0^x f(t)\,dt \leqslant S_{\lfloor x \rfloor + 1}.$$

En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ et préciser sa valeur.

(c) Démontrer que f peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire X et que sa discrétisée X_d suit la même loi que Y.