BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE EPREUVE :
292
ESC_MATS

Concepteur Epreuves ESC : ESC SAINT-ETIENNE

OPTION : SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES

Mardi 24 Mai 2005, de 14 h. à 18 h.

N.B.
Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

Pour tout triplet de réels (a,b,c) on pose $M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

1. Justifier que pour tout triplet de réels (a,b,c) la matrice $M_{a,b,c}$ est diagonalisable.

2. On pose $E = \left\{ M_{a,b,c}\ ,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

   Montrer que E est un $\mathbb{R}$- espace vectoriel dont on déterminera une base et la dimension.

3. On pose $C = M_{0,0,1}$ et h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice C dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Calculer C^2 et C^3. Donner un polynôme annulateur de C.

   (b) En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de h.

   (c) Donner une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres pour h, et orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

4. On pose $B = M_{0,1,0}$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice B dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Montrer que g et h commutent.

   (b) Montrer que tout vecteur propre de h est un vecteur propre de g.

   (c) En déduire que g et h sont diagonalisables dans une même base et donner les valeurs propres de g.

5. (a) Exprimer $M_{a,b,c}$ en fonction de I, B, C et des réels a, b et c.

   (b) En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de $M_{a,b,c}$.

6. Soit c un réel fixé.

   On considère l'application $\phi_c : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que pour tous triplets de réels (x,y,z) et (x',y',z'):

$$\phi_c((x,y,z),(x',y',z')) = {}^tX\, M_{2,1,c} X' \quad \text{où } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

   On pose $u_1 = (-1,0,1)$, $u_2 = (1,\sqrt{2},1)$, $u_3 = (1,-\sqrt{2},1)$

   (a) Montrer que ϕ_c est une forme bilinéaire symétrique de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Calculer les 6 valeurs $\phi_c(u_i,u_j)$ pour $1 \le i \le j \le 3$.

   (c) Etablir : $\left[\phi_c(u_2,u_2) > 0 \ \ et \ \ \phi_c(u_3,u_3) > 0\right] \Leftrightarrow c \in \left]\frac{-3}{\sqrt{2}} ; \frac{3}{\sqrt{2}}\right[$.

   (d) Déterminer l'ensemble des réels c tels que ϕ_c définisse un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE 2

On considère, en admettant pour l'instant son existence, la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f((a,b,c)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(a + 2bt^2 + \frac{4c}{3}t^4)}{\sqrt{\pi}} e^{-abc-t^2} dt.$$

1. (a) Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt$ converge pour tout entier naturel k. On la note I_k.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel k, $I_{2k+1} = 0$.

   (c) A l'aide du changement de variable $u = t^2$ montrer que pour tout entier naturel k : $I_{2k} = \Gamma(k + \frac{1}{2})$. En déduire les valeurs de I_2 et I_4 en fonction de $\Gamma(\frac{1}{2})$.

   (d) En utilisant la densité d'une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ avec $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$, calculer I_0.

   En déduire $\Gamma(\frac{1}{2})$, puis $I_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ et $I_4 = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

   (e) En déduire que pour tous réels a, b, c, $f((a,b,c))$ existe et $f((a,b,c)) = (a + b + c)e^{-abc}$.

2. (a) Montrer que f est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$.

   (b) Donner les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

   (c) Donner les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

3. (a) On suppose que (α, β, γ) est un point critique de f.

   Montrer que $\alpha\beta\gamma \neq 0$ et que $\frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha\gamma} = \frac{1}{\beta\gamma}$. En déduire que $\alpha = \beta = \gamma = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$.

   Réciproquement, vérifier que le point $A = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$ est bien un point critique de f.

   (b) Donner la hessienne de f au point critique A.

4. Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $H = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Montrer que la famille $\mathcal{F} = ((1,1,1), (-1,0,1), (1,-2,1))$ a les propriétés suivantes :

   - $\mathcal{F}$ est formée de vecteurs propres de h.
   - $\mathcal{F}$ est orthogonale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.
   - $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Montrer que si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors ${}^tXHX = 3(x + y + z)^2 - \frac{3}{2}(z - x)^2 - \frac{1}{2}(x - 2y + z)^2$.

   (c) En déduire que le point A est un point col de f.

EXERCICE 3

Dans tout l"énoncé S désigne un entier naturel non nul fixé.

Une urne contient initialement $4S$ boules indiscernables au toucher, dont :

S boules rouges , S boules vertes et $2S$ boules bleues .

On effectue des tirages successifs d'une boule , au hasard , avec le protocole suivant :

Si la boule tirée est rouge on ne la remet pas dans l'urne , mais on remet dans l'urne une boule bleue.
Si la boule tirée est verte on la remet dans l'urne.
Si la boule tirée est bleue on ne la remet pas dans l'urne , mais on remet dans l'urne une boule rouge.

On note pour tout entier naturel non nul n , X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne après le n - ième tirage , et on note X_0 la variable aléatoire certaine égale à S .

On rappelle que si A désigne un événement de probabilité non nulle et X une variable aléatoire discrète , $E(X / A)$ est l'espérance de X pour la probabilité conditionnelle P_A : $E(X / A) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P_A(X = x)$.

1. Déterminer la loi de X_1 et calculer son espérance.

2. Déterminer la loi de X_2 et calculer son espérance.

On suppose désormais que n est un entier supérieur ou égal à $2S$, de sorte que $X_n(\Omega) = \{ 0, \ldots, 3S \}$.

3. (a) Soit k un entier appartenant à $\{ 1, \ldots, 3S - 1 \}$.
Quelle est la composition de l'urne lorsque l'événement $(X_n = k)$ se réalise ?
En déduire la loi de X_{n+1} conditionnellement à l'événement $(X_n = k)$.

(b) Montrer alors que $E(X_{n+1} / X_n = k) = (1 - \frac{1}{2S})k + \frac{3}{4}$.
Cette formule est-elle encore vraie lorsque $k = 0$? lorsque $k = 3S$?

(c) En déduire par la formule de l'espérance totale que $E(X_{n+1}) = (1 - \frac{1}{2S})E(X_n) + \frac{3}{4}$.

4. On note pour tout entier naturel n supérieur ou égal à $2S$: $u_n = E(X_n)$.

(a) Déterminer le réel α tel que $\alpha = (1 - \frac{1}{2S})\alpha + \frac{3}{4}$

(b) Montrer que la suite $(u_n - \alpha)_{n \geq 2S}$ est géométrique.

(c) En déduire l' expression de u_n en fonction de n , S, et u_{2S} .

(d) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} E(X_n) = \frac{3S}{2}$.